



НОВОЕ
В ШКОЛЬНОЙ
МАТЕМАТИКЕ

□ $\leftarrow\rightarrow$
PCE
EV T^C
BAg o
Q_€ Δ_у

g_o
||
(t)E

*Народный университет.
Естественнонаучный факультет*

НОВОЕ В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»
Москва 1972

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

В 1969/70 учебном году по инициативе научно-методического совета по пропаганде физических и математических знаний при Правлении Всесоюзного общества «Знание» в Центральном лектории (в Москве) был прочитан цикл лекций для учителей под общим названием «Новое в школьной математике». Так как эти лекции могло прослушать лишь небольшое число московских учителей, научно-методический совет принял решение об опубликовании текстов лекций, которые и составили основу настоящего сборника.

Н 73
51(07)

Н 73 Новое в школьной математике. Сборник

**М., «Знание», 1972. («Народный университет». Естественнo-учный факультет).
200 с.**

Переход на новые программы — большое событие в жизни школы. Особенно велики изменения в курсе математики, в который включены разделы, традиционно относившиеся лишь к высшей, т. е. вузовской, математике.

Авторы сборника академик А. Н. Колмогоров, вице-президент АПН СССР А. И. Маркушевич, академик АН УССР Б. В. Гнеденко, член-корреспондент АПН СССР В. Г. Болтянский и другие анализируют предстоящую реформу, дают методические советы.

Сборник явится пособием для преподавателей математики средних школ, а также представит интерес для студентов и преподавателей пединститутов.

2—2—3
Т. п. 1971 г. № 132

51(07)

НОВОЕ В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Составитель Исаак Моисеевич Яглом

Редактор В. С. Захаров.
Обложка В. Пантелеева.
Худож. редактор Т. И. Добровольнова.
Техн. редактор Т. В. Пичугина.
Корректор Л. Д. Васильева

A02025. Сдано в набор 4/VIII-1971 г. Подписано к печати 14/I-1972 г.
Формат бумаги 84×108/32 Бумага типографская № 2 Бум. л. 3,125
Печ. л. 6,25. Условн. печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 10,08.
Тираж 115 000 экз. Издательство «Знание». Москва, Центр, Новая пл., д. 3/4
Цена 30 коп.

Типография издательства «Связь» Комитета по печати при Совете Министров СССР. Москва-центр, ул. Кирова, 40. Зак. тип. 327

НАЧАЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ



Чем глубже и критичнее изучаются основы современной математики, тем труднее становится «элементарное», наглядное введение основных понятий, изучаемых в средней школе. В особенности это относится к начальным понятиям математического анализа, и в частности дифференциального исчисления. К таким понятиям относятся понятия действительного числа, функции, предела и производной. Непрерывность функции, хотя и является чрезвычайно важным первым свойством, выделяющим из всего множества функций более узкий класс, доступный конкретному изучению, в то же время не может рассматриваться как обязательное, так как в школе ввиду малого «запаса» функций и отсутствия навыков исследования объема определяемого понятия вся широта функционального пространства остается как бы за пределами рассмотрения. Поэтому, как это предусматривает программа, от функции и ее предела можно сразу переходить к специальному виду предела, дающего производную.

Понятие действительного числа и определение функциональной зависимости настолько подробно разработано в нашей литературе, что в статье на них останавливаться не будем. Методика преподавания начал дифференциального исчисления в средней школе подверглась за последние два десятилетия также всестороннему анализу в большом числе диссертаций, статей, брошюр и разработок. В настоящей статье будут изложены отдельные соображения, относящиеся к некоторым вопро-

сам преподавания понятия предела и производных элементарных функций.

1. *Предел функции в точке* — понятие в некотором смысле синтетическое. Если опираться на интуитивное представление о монотонно изменяющейся переменной, то естественно вытекающим является понятие одно-

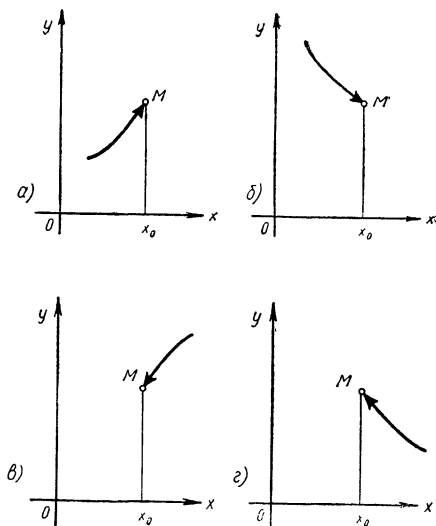


Рис. 1

стороннего предела. Когда « x стремится к x_0 возрастая, т. е. слева», или когда « x стремится к x_0 убывая, т. е. справа», мы изучаем, как ведет себя $y=f(x)$; при этом можно даже не упоминать возможности сложного, колеблющегося поведения $f(x)$ при стремлении к своему пределу, так как «хорошие» функции стремятся к своим пределам также монотонно. Таким образом, возникают четыре основных, нормальных типа стремления функции к пределу (рис. 1).

В самом определении, которое сформулировано ниже, такие ограничения на поведение функции, конечно, не содержатся, так же как не содержатся в нем «кинематические» характеристики изменения x (стремление слева, стремление справа). В этом и заключается, по-видимому, одно из методических умений учителей математики давать достаточно общие формулировки, но

иллюстрировать их и добиваться их понимания на достаточно узком классе объектов.

Для данной точки x_0 определим *левую (правую) δ -полуокрестность* как открытый интервал $x_0 - \delta < x < x_0$ (соответственно $x_0 < x < x_0 + \delta$), где δ — некоторое положительное число. Левую δ -полуокрестность обозначим через $U_\delta^-(x_0)$, правую δ -полуокрестность — через $U_\delta^+(x_0)$. Обозначим еще через X множество определения функции, т. е. множество тех значений X , для которых $f(x)$ определена. Тогда можно сформулировать следующие определения:

1. Число l^- называется *левосторонним пределом* функции $f(x)$ в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что, во-первых, $U_\delta^-(x_0) \subset X$ и, во-вторых, для всех $x \in U_\delta^-(x_0)$ имеет место неравенство (называемое часто основным неравенством): $|l^- - f(x)| < \varepsilon$.

2. Число l^+ называется *правосторонним пределом* функции $f(x)$ в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что, во-первых, $U_\delta^+(x_0) \subset X$ и, во-вторых, для всех $x \in U_\delta^+(x_0)$ имеет место (основное) неравенство $|l^+ - f(x)| < \varepsilon$.

В процессе разъяснения этих определений на рисунке (который в статье не приводится ввиду его общеизвестности) выясняется, что δ зависит от ε и что, вообще говоря, чем меньше мы выбираем ε , тем меньше оказывается δ .

Эти определения всегда закрепляются на нескольких конкретных примерах с непосредственным вычислением δ как функции от ε . Простейшим нетривиальным примером является проверка того, что как левый, так и правый предел функции $f(x) = x^2$ в точке x_0 есть x_0^2 . Покажем, что левый предел x^2 в точке x_0 равен x_0^2 . Начиная с основного неравенства, которое, как следует показать, должно иметь место в определенных условиях. Так как в любой левой полуокрестности имеем $x < x_0$, то $|x_0^2 - x^2| = (x_0 - x)|x_0 + x|$ и нужно потребовать выполнения неравенства $(x_0 - x)|x_0 + x| < \varepsilon$, или

$$x_0 - x < \frac{\varepsilon}{|x_0 + x|}.$$

Но в $U_{\delta}^{-}(x_0)$ имеет место оценка $|x_0 + x| < 2|x_0|$, и поэтому в этой полуокрестности

$$\frac{\varepsilon}{|x_0 + x|} > \frac{\varepsilon}{2|x_0|},$$

так что наше основное неравенство наверняка будет выполнено, если

$$x_0 - x < \frac{\varepsilon}{2|x_0|}.$$

Теперь мы знаем, каким надо выбрать δ по заданному ε , а именно: $\delta = \frac{\varepsilon}{2|x_0|}$. Именно при таком δ , как пока-

зывают приведенные выше оценки, для $x \in U_{\delta}^{-}(x_0)$ будет выполняться основное неравенство $|x_0^2 - x^2| < \varepsilon$. Точно так же доказывается, что x_0^2 является правым пределом x^2 в точке x_0 .

Этот пример можно провести и при любом числовом значении x_0 , но общее рассмотрение вскрывает еще одну

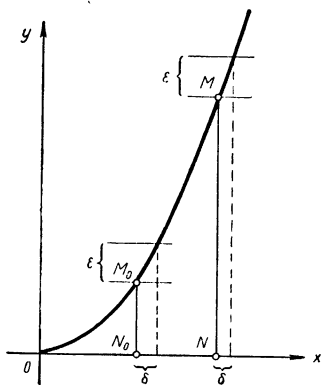


Рис. 2

особенность изучаемого понятия предела: ε зависит не только от δ , но еще и от x_0 . Хотя этот факт в школе не имеет никакого значения, но в действительности он исключительно важен, так как приводит к необходимости введения понятия равномерного стремления к пределу, равномерной сходимости и равномерной непрерывности. Если класс выдерживает напряжение, связанное с усвоением понятия одно-

стороннего предела, и обладает навыками, необходимыми для проведения указанных оценок, то можно сделать еще один шаг и продемонстрировать геометрический смысл найденного выражения для δ в нашем примере (рис. 2, где δ вычислено для правого предела): чем круче кривая, тем меньше δ при одном и том же ε !

Этот пример должен показаться тривиальным для учащихся, которые знают график $y = x^2$ как хорошую

(непрерывную и гладкую) кривую — параболу. Но второй обязательный пример, относящийся к пределам слева и справа $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$, уже никак не тривиален потому, что, во-первых, график $y = \frac{\sin x}{x}$ и его свойства учащимся неизвестны и, во-вторых, в рассматриваемой точке 0 функция $\frac{\sin x}{x}$ просто не определена. Здесь мы встречаемся с двумя новыми моментами для вычисления односторонних пределов: 1) ввиду четности функции $\frac{\sin x}{x}$ левый и правый пределы, если они существуют, должны быть равны, и 2) мы здесь не имеем никаких предположений относительно значений пределов и должны фактически только проверить, что эти пределы равны 1, а откуда это предполагаемое значение 1 взялось, нет возможности объяснить. Широко известные выкладки действительно подтверждают, что левый (а значит, и правый) предел функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке 0 равен 1.

Когда отработаны односторонние пределы в точке (которая, как вытекает из определений односторонних пределов, не обязана принадлежать сама к множеству определения X функции), то *предел функции в точке* (двусторонний предел) определяется просто как общее значение левого и правого пределов. Таким образом, для того чтобы предел функции в точке существовал, необходимо и достаточно существование обоих односторонних пределов и их равенство. Если сама функция в этой точке не определена, то она имеет в этой точке устранимый разрыв. Такая ситуация в действительности является наиболее важной для наших целей, так как отношение приращений функции и аргумента

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

рассматриваемое как функция от x , для дифференцируемой функции $f(x)$ имеет в точке x_0 как раз устранимый разрыв. Значение любого одностороннего предела этого отношения в точке x_0 , т. е. вывод производной $f'(x)$ при

$x = x_0$, уже происходит на основании известных теорем о пределах.

При фактическом выводе производных обычно полагают $x - x_0 = \Delta x$, после чего вместо x_0 пишут x , так что ищется предел

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

2. Довольно трудным и методически спорным вопросом является вывод *производной показательной функции* в школьном курсе. Как хорошо известно, этот вывод связан с нахождением следующего предела. Если

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

то

$$\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$$

(первый множитель a^x не зависит от Δx , и как постоянная — относительно Δx — может быть вынесен за знак предела). Объяснительная записка к новой программе рекомендует принять без доказательства существование

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = c,$$

где c — некоторое число (при заданном a). В действительности, конечно, значение этого предела c зависит от выбора a , так что $c = c(a)$ (c является функцией от a). Если придерживаться рекомендации объяснительной записки, то найдем, что

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x c.$$

Геометрический смысл c состоит в том, что $c(a)$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции $y = a^x$ в точке его пересечения с осью y , т. е. при $x = 0$:

$$(a^x)'|_{x=0} = a^0 \cdot c = c.$$

Из общих соображений, связанных с поведением функции $y = a^x$, можно легко установить следующие свойства $c(a)$. Если $a > 1$, то график функции $y = a^x$ пересекает ось y возрастая, т. е. касательная к нему в точке $x = 0$, $y = 1$ образует с положительным направлением

оси x острый угол φ (рис. 3). Поэтому $c(a) = \operatorname{tg} \varphi > 0$ при $a > 1$. Из этих рассуждений можно извлечь больше информации о поведении $c(a)$. Действительно, график функции $y = a^x$ тем круче возрастает, чем больше a ,

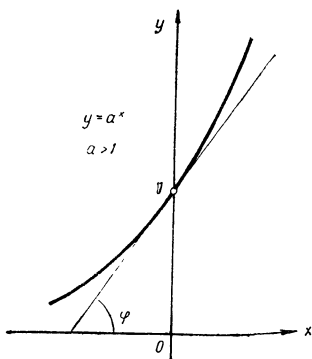


Рис. 3

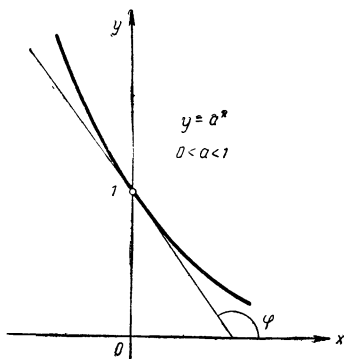


Рис. 4

а следовательно, чем больше a , тем ближе острый угол φ к 90° . Это говорит о том, что при увеличении a интересующая нас величина $c(a)$ неограниченно возрастает.

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < a < 1$. В этом случае функция $y = a^x$ при увеличении x убывает и ее график пересекает ось y так, что касательная к нему в этой точке пересечения образует с положительным направлением оси x тупой угол (рис. 4). Следовательно, для $0 < a < 1$ имеем $c(a) < 0$, и нетрудно заключить, что при a , стремящемся к нулю, $c(a)$ неограниченно убывает. Теперь целесообразно включить и значение основания $a = 1$, при котором показательная функция становится постоянной $y \equiv 1$, а ее производная тождественно равной нулю. Отсюда, конечно, следует, что $c(1) = 0$, и мы имеем полную картину изменения $c(a)$ в зависимости от a , т. е. $c(a)$ возрастает от 0 до $+\infty$, когда a возрастает от 1 до $+\infty$; $c(a)$ убывает от 0 до $-\infty$, когда a убывает от 1 до 0. Вместе взятое это означает, что $c(a)$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, когда a возрастает от 0 до $+\infty$, причем c обращается в нуль при $a = 1$.

В действительности, конечно, $c(a) = \ln a$ и, таким образом, получено описание поведения этой функции ис-

ходя из ее определения через предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Постулируя *непрерывность* c как функции от a , можно сделать заключение, что существует единственное значение a , которое обозначим через e , при котором $c(e) = 1$, и, следовательно,

$$(e^x)' = e^x.$$

Конечно, на этом пути логарифм, как он известен из школьного курса, вообще не возникает, но для понимания сути этого пути отметим еще, что $\ln e = c(e) = 1$, т. е. что здесь мы имеем дело с логарифмом при основании e , т. е. *натуральным логарифмом*. Таким образом, неперово число e здесь присутствует, так сказать, за кулисами.

Учитывая универсальность числа e и показательной функции e^x в современной прикладной математике от самых ее элементов до сложнейших численных методов, целесообразно предложить введение числа e в школьный курс, одновременно значительно просветляя вывод производной показательной функции, который сейчас обсуждался.

Вместо того чтобы принять без доказательства существование предела

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

(факт, правдоподобность которого трудно обосновать простыми соображениями), можно принять без доказательства существование классического (второго замечательного) предела

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e$$

(через e обозначается этот предел). Факт существования этого (второго) предела можно все-таки подкрепить простыми соображениями. Именно будем придавать бесконечно малому переменному α значения $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$ и следить за поведением «варианты»

$$(1 + \alpha)^{1/\alpha},$$

Составим таблицу

α	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$...
$(1 + \alpha)^{1/\alpha}$	2,00	2,25	2,37	2,44	2,49	...

Рассматривая ее, можно выдвинуть гипотезу, что $(1 + \alpha)^{1/\alpha}$ возрастает, когда α стремится к нулю, оставаясь положительным. Другая таблица

α	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$...
$(1 + \alpha)^{1/\alpha}$	4,00	3,37	3,16	3,05	3,02	...

наводит нас на мысль, что $(1 + \alpha)^{1/\alpha}$ убывает, когда α стремится к нулю, принимая отрицательные значения. Если мы просто для субъективной уверенности возьмем еще в первой таблице $\alpha = \frac{1}{10}$ и во второй $\alpha = -\frac{1}{11}$, то небольшой подсчет покажет, что соответствующие значения $(1 + \alpha)^{1/\alpha}$ будут 2,60 и 2,86. Теперь уже без большой натяжки можно постулировать, что существуют пределы $(1 + \alpha)^{1/\alpha}$ при $\alpha \rightarrow 0^+$ и при $\alpha \rightarrow 0^-$ и что они равны:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} (1 + \alpha)^{1/\alpha}.$$

Общее значение этих пределов — число e , по нашим прикидкам, заключено между 2,60 и 2,86. Его значение подсчитано с большой точностью:

$$e = 2,718281828459...$$

Введя второй замечательный предел e , можно вывести производную показательной функции следующим образом.

Обозначим $a^{\Delta x} - 1$ через α , так что при Δx , стремящихся к 0, и α стремится к 0. Тогда

$$a^{\Delta x} - 1 = \alpha, \quad \Delta x = \log_a (1 + \alpha)$$

и

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{\alpha}{\log_a (1 + \alpha)} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} \log_a (1 + \alpha)} = \frac{1}{\log_a [(1 + \alpha)^{1/\alpha}]},$$

так что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a [(1 + \alpha)^{1/\alpha}]} = \frac{1}{\lim_{\alpha \rightarrow 0} \log_a [(1 + \alpha)^{1/\alpha}]}.$$

Теперь следует воспользоваться непрерывностью логарифмической функции, на основании которой можно утверждать, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \log_a [(1 + \alpha)^{1/\alpha}] = \log_a [\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha}] = \log_a e.$$

Таким образом, находим, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a,$$

и тем самым установлено, что $c(a) = \ln a$.

Само доказательство существования предела $(1 + \alpha)^{1/\alpha}$ при α , стремящемся к нулю, справа и слева можно рекомендовать провести на факультативных занятиях по математике в 9-м классе для заинтересованных учащихся. Это доказательство не содержит современных идей (ознакомление с которыми на самом раннем этапе изучения математики сейчас почему-то считается необходимым и прогрессивным), но оно удовлетворяет тех учеников, которые хотят узнать строгое подтверждение математического эксперимента, содержащегося в составленных выше таблицах. Предлагаемое доказательство обладает также известной математической красотой, выражающейся в экономии средств и в том, что доказываемый результат возникает почти без «запаса прочности».

Положим, $\alpha = \frac{1}{n}$ (как в первой таблице) и покажем,

что

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

т. е. подтвердим гипотезу, подсказываемую этой табли-

дей. Для этого образуем отношение

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} &= \frac{(n+2)^{n+1} n^n}{(n+1)^{2n+1}} = \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right)^n = \\ &= \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n + 1}\right)^n. \end{aligned} \quad (1)$$

Нужно доказать, что это отношение для всех $n=1, 2, 3, \dots$ больше 1. Здесь нужно включить одно вспомогательное предположение (играющее довольно важную роль во всем анализе), называемое неравенством Бернулли.

Л е м м а. Если $u > -1$ и $n=1, 2, 3, \dots$, то

$$(1+u)^n \geq 1+nu. \quad (2)$$

Доказательство. Действительно, для $n=1$ неравенство (2) верно (оно обращается в равенство). Допустим, по методу полной математической индукции, что неравенство (2) справедливо для $n=k$, и докажем, что оно тогда справедливо и для $n=k+1$.

Так как

$$(1+u)^{k+1} = (1+u)(1+u)^k,$$

а по предположению

$$(1+u)^k \geq 1+ku,$$

то

$$(1+u)^{k+1} \geq (1+u)(1+ku) = 1 + (k+1)u + ku^2 \geq 1 + (k+1)u,$$

т. е. получаем неравенство (2) для $n=k+1$. Доказательство леммы закончено.

Теперь положим в выражении (1)

$$u = \frac{1}{n^2 + 2n + 1} \geq -\frac{1}{4} > -1$$

и применим неравенство (2); тогда получим

$$\left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n + 1}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{n^2 + 2n + 1} = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1}.$$

Поэтому по (1) имеем:

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 1} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1.$$

Таким образом, доказано, что действительно

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

для $n=1, 2, 3 \dots$

Докажем аналогично, что общий факт, на который указывает вторая таблица, а именно что при $\alpha = \frac{1}{n}$,

$n=-2, -3 \dots$ величина $(1+\alpha)^{1/\alpha}$ убывает. Пусть $m=-n$, $m=2, 3, \dots$, что влечет за собой преобразование

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m = \left(\frac{m}{m-1}\right)^m.$$

Нужно показать, что последовательность $\left(\frac{m}{m-1}\right)^m$ убывающая. Для этого образуем отношение

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{m}{m-1}\right)^m}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}} &= \frac{m^{2m+1}}{(m-1)^m (m+1)^{m+1}} = \frac{m}{m+1} \left(\frac{m^2}{m^2-1}\right)^m = \\ &= \frac{m}{m+1} \left(1 + \frac{1}{m^2-1}\right)^m, \end{aligned} \quad (3)$$

нам нужно доказать, что оно больше 1. По лемме при

$$n = \frac{1}{m^2-1} > 0 > -1$$

найдем, что

$$\left(1 + \frac{1}{m^2-1}\right)^m \geq 1 + \frac{m}{m^2-1} = \frac{m^2+m-1}{m^2-1},$$

а стало быть, по (3)

$$\frac{\left(\frac{m}{m-1}\right)^m}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}} \geq \frac{m}{m+1} \cdot \frac{m^2+m-1}{m^2-1} = \frac{m^3+m^2-m}{m^3+m^2-m-1} > 1,$$

что и требовалось доказать.

Подведем предварительные итоги. Мы доказали, что последовательность

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

возрастает, а последовательность

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

убывает. Установим теперь, что для каждого $n \geq 2$ член второй последовательности больше соответствующего члена первой последовательности. Начнем с очевидного неравенства

$$(n^2 - 1)^n < (n^2)^n,$$

из которого следует, что

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n,$$

т. е. что

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n},$$

а это и есть как раз наше утверждение.

Все эти результаты полезно показать на рисунке (рис. 5, на котором масштаб по оси ординат выбран

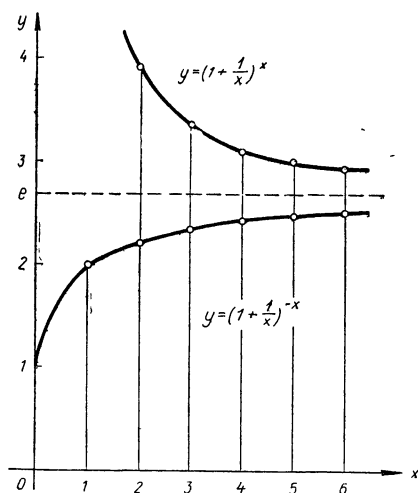


Рис. 5

в 2 раза больше, чем по оси абсцисс). Нижние точки лежат на графике функции $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, а верхние —

на графике функции $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}$. Точки на этих графиках отмечены по данным приведенных выше таблиц, построение же самих кривых более сложно и не должно приводиться в школьном обучении (хотя учителю весьма полезно быть знакомым с этими кривыми, см., например, [3]).

Теперь до доказательства существования интересующего нас предела осталось только два шага. Первый — интуитивно очевидный, но аксиоматически весьма глубокий — состоит в том, что нижняя последовательность

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

возрастая и оставаясь ограниченной сверху (например, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4$), должна стремиться к пределу и что верхняя последовательность

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n},$$

убывая и оставаясь ограниченной снизу (например, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} > 2$), тоже должна стремиться к пределу. Вторым и последним шагом состоит в том, чтобы доказать совпадение пределов нижней и верхней последовательностей. А для этого достаточно показать, что разность

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

стремится к нулю (при $n \rightarrow \infty$). Это видно, наконец, из следующей оценки:

$$\begin{aligned} 0 &< \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} - 1 \right] < 4 \left[\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} - 1 \right] = \\ &= 4 \left[\frac{n^{2n}}{(n^2 - 1)^n} - 1 \right]; \end{aligned}$$

но по лемме

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

и, следовательно,

$$0 < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4 \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} - 1 \right] = \\ = \frac{4}{n \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{4}{n-1},$$

что действительно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

3. Возвращаясь к замечанию, сделанному вначале, укажем, что в школе, как нам кажется, нет необходимости подчеркивать всю широту вводимых определений и делать акцент на могущих возникнуть «патологических» случаях. Вместе с тем те определения, которые нужно дать, должны быть сформулированы четко и правильно, а их использование в рамках школьного материала должно быть отнесено к «нормальным», наиболее простым, разумным с точки зрения непосредственных приложений, случаям. Это и было продемонстрировано, в частности, на примере понятия одностороннего предела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вейц Б. Е., Демидов И. Т. Алгебра и начала анализа. Пробный учебник. 9-й класс. Под ред. акад. А. Н. Колмогорова. М., «Просвещение», 1969.
2. Виленкин Н. Я., Шварцбурд С. И. Математический анализ. М., «Просвещение», 1969.
3. Гончаров В. Л. Элементарные функции действительного переменного. Пределы последовательностей и функций. Общее понятие функции. — В кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. III. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
4. Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих и ее приложение к физике. М., «Наука», 1970.
5. Маркушевич А. И., Сикорский К. П., Черкасов Р. С. Алгебра и элементарные функции. Под ред. А. И. Маркушевича. М., «Просвещение», 1968.

А. И. МАРКУШЕВИЧ,
доктор физико-математических наук,
действительный член АПН СССР

ИНТЕГРАЛ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ



В курсе «Алгебра и начала анализа» пять тем из общего числа восьми почти полностью посвящаются началам анализа. В 9-м классе это три темы (2, 3, 4): бесконечные последовательности и пределы (15 ч); производная и ее применения (45 ч); тригонометрические функции, их графики и производные (30 ч). В 10-м классе две темы (5, 6): производная показательной функции и логарифма (15 ч); интеграл (12 ч). Интегралу здесь отведено сравнительно скромное место — около 10% от общего числа часов на начала анализа. Но, кроме того, есть еще некоторое время, выделяемое в курсе геометрии 10-го класса, на вычисление объемов и поверхностей тел вращения с помощью интегралов.

Содержание темы «Интеграл» раскрывается в программе следующим образом: первообразная; определенный интеграл и его применение к вычислению площадей; формула Ньютона—Лейбница. На ознакомление с понятием первообразной и решение соответствующих примеров достаточно выделить четыре урока, остальные восемь пойдут на понятие определенного интеграла и его применения с использованием формулы Ньютона—Лейбница.

Ознакомление с понятием интеграла (первообразной) не предполагает какой-либо систематизации приемов интегрирования. Как гласит объяснительная записка, «достаточное число примеров может быть разобрано с непосредственным обращением к таблице производных

элементарных функций, которая должна служить итогом изучения тем 3, 4 и 5».

1. Естественно начать тему с рассмотрения такой таблицы (заранее заготовленной). Ей можно придать, например, следующий вид:

Таблица 1

№ п/п	Функция	Производная
1	1	0
2	x	1
3	x^n	nx^{n-1}
4	$\sin x$	$\cos x$
5	$\cos x$	$-\sin x$
6	$\sin kx$	$k \cos kx$
7	$\cos kx$	$-k \sin kx$
8	$a^x (a > 0)$	$a^x \ln a$
9	$\ln x$	x^{-1}
10	$Kf(x) + Lg(x) + Mh(x)$	$Kf'(x) + Lg'(x) + Mh'(x)$

Можно заметить, что формулы 1 и 2 являются частными случаями 3 и формулы 4 и 5 — частными случаями 6 и 7. Формула 10 включает в себя как правило вынесения постоянного множителя за знак производной (например, если $L=M=0$), так и правило дифференцирования суммы. Учащиеся должны понимать, что на основании этого правила можно умножать функции, стоящие в одной и той же строке таблицы, на одну и ту же константу, например, $(C)'=0$, $(Cx)'=C$, $(Cx^n)'=Cnx^{n-1}$ и т. п.

2. *Интегрирование* вводится как операция, обратная дифференцированию. Результат этой операции называется *первообразной*. Таблица 1 позволяет сказать, что функция, тождественно равная 1 (или вообще любая константа), есть первообразная от 0, x — первообразная от 1, $\sin x$ — от $\cos x$ и т. п.

Для разъяснения введенных терминов и понятий сообщается, что латинское слово «*integratio*» означает восстановление. Интегрируя какую-либо функцию, напри-

мер $4x^3$, мы как бы восстанавливаем ту функцию (x^4) , производная которой равна $4x^3$.

В определении понятия интегрирования эпитет «обратная» следует понимать не в том расплывчатом и неточном смысле, в каком принято операцию вычитание называть обратной к сложению, а деление — к умножению. В данном случае речь идет об обращении отношения элементов одного множества к элементам другого (или того же самого множества).

Примеры: Петя — сын Марии Ивановны, Мария Ивановна — мать Пети; 3 в кубе равно 27, корень кубический из 27 равен 3; $4x^3$ — производная от x^4 , x^4 — первообразная от $4x^3$ и т. п. Заметим, что во всех этих примерах прямое отношение (быть сыном своей матери, возведение в куб, дифференцирование) однозначно. Однако обратное отношение в примере первом, вообще говоря, многозначно: у Марии Ивановны могут быть и другие сыновья. Многозначно и интегрирование: первообразной от $4x^3$ является не только x^4 , но и функции x^4+1 ; x^4-1 ; $x^4+\sqrt{2}$; $x^4+\pi$ и т. п.

Исчерпываются ли все возможные первообразные от $4x^3$ функциями вида x^4+C , где C какое угодно действительное число? Положительный ответ на это дает следующая теорема, принимаемая без доказательства.

Теорема 1. Любые две первообразные от одной и той же функции отличаются одна от другой на постоянное слагаемое.

Отсюда следует, что если $F(x)$ какая-либо первообразная от $4x^3$, то существует такое число C (константа), что $F(x)=4x^3+C$.

В качестве упражнения для более сильных учащихся можно предложить доказать, что теорема 1 является следствием более частного утверждения: *любая первообразная от функции тождественно равной нулю, есть константа*. В конечном счете именно это утверждение и принимается без доказательства (в курсах анализа оно получается как простое следствие из формулы конечных приращений Лагранжа).

Теперь можно предложить учащимся преобразовать таблицу 1 к виду, более удобному для отыскания первообразных. Для этого первый и второй столбцы таблицы меняются местами, коэффициенты функций нового первого столбца приводятся к единице (кроме функций

первой и последней строки) посредством умножения на соответствующие константы, к функциям нового второго столбца добавляются произвольные слагаемые для получения общего вида первообразной.

В результате получается следующая таблица первообразных:

Таблица 2

№ п/п	Функция	Первообразная
1	0	C
2	1	$x + C$
3	$x^m (m \neq -1)$	$\frac{1}{m+1} x^{m+1} + C$
4	$\sin x$	$-\cos x + C$
5	$\cos x$	$\sin x + C$
6	$\sin kx (k \neq 0)$	$-\frac{1}{k} \cos kx + C$
7	$\cos kx (k \neq 0)$	$\frac{1}{k} \sin kx + C$
8	$a^x (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
8'	e^x	$e^x + C$
9	x^{-1}	$\ln x + C$
10	$Kf'(x) + Lg'(x) + Mh'(x)$	$Kf(x) + Lg(x) + Mh(x) + C$

Третья строка сначала могла бы выглядеть так: $x^{n-1} (n \neq 0) \frac{x^n}{n} + C$; затем последовала замена $n-1$ на m . Учащемуся должен быть ясен смысл оговорок: $m \neq -1, k \neq 0, a \neq 1$, вызванных тем, что для получения таблицы 2 из 1 приходилось пользоваться множителями $\frac{1}{n} = \frac{1}{m+1}, \frac{1}{k}, \frac{1}{\ln a}$. Ввиду важности функции e^x для нее выделена строка 8'; она получается из строки 8 при $a=e$.

Таблица позволяет выполнить ряд упражнений на отыскание первообразных. Полезно заметить, что функ-

ции $\ln(2x)$, $\ln(3x)$, ..., вообще $\ln(Cx)$ (здесь $C > 0$, если область определения функции есть $x > 0$) являются первообразными от $\frac{1}{x}$. Не должны остаться без применения правила, выражаемые последней строкой таблицы. С ее помощью находим, например, что первообразной от $x^2 + px + q$ является

$$\frac{1}{3} x^3 + \frac{p}{2} x^2 + qx + C.$$

Наконец, нужно рассмотреть упражнения, вводящие ограничения на константу C . Например, среди первообразных от функции $y = x$ выделить ту, график которой проходит через начало координат, через точку $(1, 1)$, через точку (a, b) , может ли первообразная от функции $y = \cos x$ принимать значение 1000 при $x = \frac{\pi}{2}$, при каких значениях константы C это будет выполняться?

К этим упражнениям примыкают задачи на движение точки по прямой. Пусть точка M движется по оси абсцисс по закону $x = f(t)$, где t — время, отсчитываемое от некоторого момента $t = 0$. Тогда скорость точки M в момент t есть $v = g(t) = f'(t)$, а ускорение — $a = h(t) = g'(t)$.

Отсюда следует, что расстояние $x = f(t)$ движущейся точки от начала координат есть первообразная от скорости, а скорость — первообразная от ускорения. Поэтому, пользуясь таблицей первообразных, можно находить закон движения точки по скорости, скорость — по ускорению или по силе, действующей на точку (здесь нужно вспомнить второй закон Ньютона) и, наконец, закон движения точки — по действующей на нее силе (через посредство скорости).

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Скорость точки, движущейся по оси абсцисс, выражается формулой $v = v_0 + at$, где a — постоянная. Найти положение точки в любой момент t , если известно, что в момент $t = t_0$ она находилась в точке с абсциссой x_0 .

Решение. $x = f(t)$ есть первообразная от v (одна из первообразных). Поэтому $x = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 + C$; чтобы найти постоянную C , положим $t = 0$, получим $x_0 = C$. Следовательно,

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2.$$

Пример 2. Сила, действующая на точку с массой m в направлении прямой, по которой движется точка, меняется по синусоидальному закону: $F=A \sin kt$, где $A>0$ и $k>0$. Если при $t=0$ скорость точки равнялась v_0 , то какой она будет через t секунд?

Решение. Найдем сначала по силе ускорение, а затем уже по ускорению и скорость. По второму закону Ньютона ускорение $a=\frac{F}{m}=\frac{A}{m} \sin kt$. Но скорость есть первообразная от ускорения, поэтому $v=-\frac{A}{mk} \cos kt+C$, где C — произвольная постоянная. Так как $v=v_0$ при $t=0$, то $v_0=-\frac{A}{mk}+C$, откуда $C=v_0+\frac{A}{mk}$. Следовательно, $v=v_0+\frac{A}{mk}-\frac{A}{mk} \cos kt$. Отсюда вытекает, в частности, что за все время движения скорость точки будет колебаться между v_0 и $v_0+\frac{2A}{mk}$.

Пример 3. Может ли точка в условиях предыдущей задачи совершать гармонические колебания?

Решение. Так как абсцисса x движущейся точки является первообразной от скорости $v=v_0+\frac{A}{mk}-\frac{A}{mk} \cos kt$, то $x=\left(v_0+\frac{A}{mk}\right)t-\frac{A}{mk^2} \sin kt+C$. При $t=0$ имеем $x=C$; следовательно, C — абсцисса точки в момент времени $t=0$. Обозначая ее через x_0 , находим

$$x=x_0+\left(v_0+\frac{A}{mk}\right)t-\frac{A}{mk^2} \sin kt.$$

Отсюда видно, что движение точки складывается из двух: равномерного, со скоростью $v_0+\frac{A}{mk}$, и гармонического, с амплитудой $\frac{A}{mk^2}$ и частотой k . Все движение будет гармоническим колебанием тогда и только тогда, когда $v_0+\frac{A}{mk}=0$, т. е. $v_0=-\frac{A}{mk}$.

3. Как уже было сказано выше, для выяснения понятия первообразной, составления таблицы первообразных (табл. 2) и решения некоторого количества упражнений на отыскание первообразных посредством таблицы, включая и такие упражнения, где определяются значения постоянных интегрирования, — для всего этого достаточно четыре урока (от силы пять). Еще раз хочется подчеркнуть, что запоминания таблицы первооб-

разных не требуется, достаточно умения сознательно пользоваться ею.

Теперь предстоит сделать следующий шаг: ввести понятие определенного интеграла (вместе с соответствующим обозначением). Подготовкой к нему служит рассмотрение площадей под графиком функции. Пусть $y=f(x)$ какая-либо функция (для простоты будем считать ее дифференцируемой). График (рис. 1) позволяет

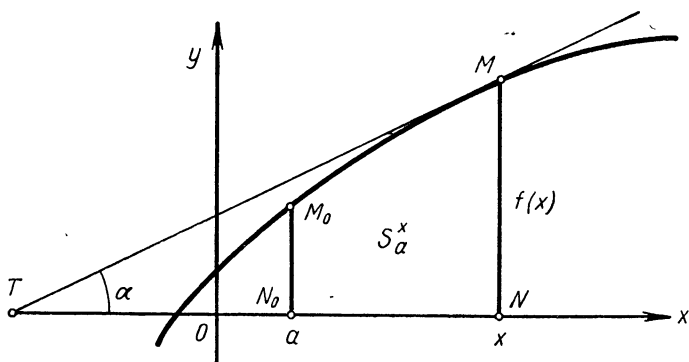


Рис. 1

наглядно представить не только эту функцию $f(x)$ в виде ординаты точки M с абсциссой x , но и другие, связанные с ней функции. Например, функцию $f'(x)$, представляемую тангенсом угла наклона касательной в точке M , или функцию, изображаемую направленным отрезком TN (подкасательная) и т. п.

Если на графике выбрать еще какую-либо точку M_0 с абсциссой a (a мы рассматриваем как постоянное), то получим площадь фигуры N_0NMM_0 , которая также будет являться функцией от x , очевидно, полностью определяемой данным графиком и заданием точки M_0 на нем. Ее можно рассматривать как *площадь, расположенную под графиком функции $y=f(x)$* (при другом выборе графика она могла бы располагаться и над графиком или, наконец, частично «под», частично «над» — возьмите, например, синусоиду). Вид этой площади на рис. 1 объясняет, почему ее принято называть *криволинейной трапецией*. Обозначать же ее будем так: пл. $N_0NMM_0 = S_a^x$. Введем условие, благодаря которому

площади S_a^x могут быть не только положительными, но и отрицательными. Смысл и целесообразность этого условия разясним на простейших примерах.

Пример 1. Пусть сначала $f(x)=1$; тогда график представляет прямую, параллельную оси абсцисс, расположенную выше ее на расстоянии 1 (рис. 2). Очевид-

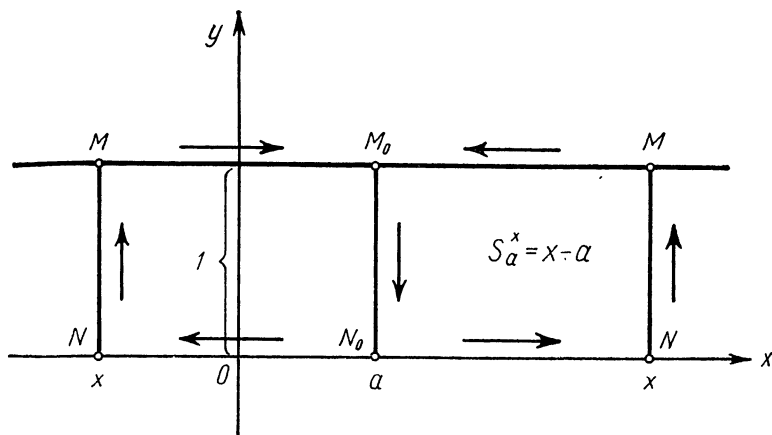


Рис. 2

но, что здесь трапеция вырождается в прямоугольник и для S_a^x получаем $x-a$. Хотя этот результат верен только для $x>a$, можно придать ему смысл и при $x=a$: здесь прямоугольник вырождается в отрезок и площадь обращается в 0. Условимся далее пользоваться той же формулой и для $x<a$, считая площадь в этом случае отрицательной. Геометрически оба случая $x>a$ и $x<a$ легко отличить один от другого, если обходить контур фигуры, начиная с оси абсцисс, в направлении от точки с абсциссой a к точке с абсциссой x . В первом случае получим обход против часовой стрелки и положительную площадь, во втором — обход по часовой стрелке и отрицательную площадь. Аналогичного правила о связи между направлением обхода и знаком площади будем придерживаться в дальнейшем для графиков любого вида и соответствующих им криволинейных трапеций.

Пример 2. Если $f(x) = x$, то на рис. 3 справа видим обыкновенную трапецию, площадь которой $S_a^x = \frac{1}{2}(x+a)(x-a) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2$. Учащийся должен уяснить себе, почему, например, при принятых нами условиях $S_a^0 = -\frac{1}{2}a^2 < 0$ (криволинейная трапеция здесь превращается в треугольник, контур которого обходится по часовой стрелке) и $S_{-a}^a = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(-a)^2 = 0$ (криволинейная трапеция распадается на два равных треугольника, контур одного из которых обходится по часовой стрелке, а другого — против).

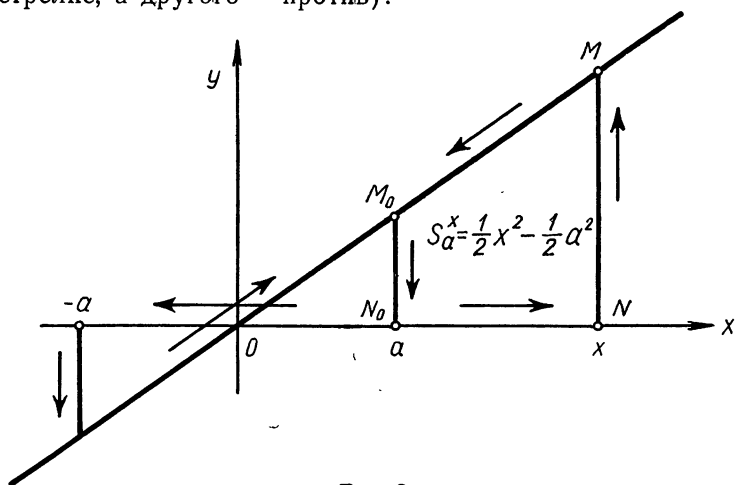


Рис. 3

Надо обратить внимание учащихся на связи в этих двух примерах между функциями $f(x)$ и S_a^x . В первом примере $f(x) \equiv 1$, $S_a^x = x - a$; во втором — $f(x) \equiv x$, $S_a^x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2$.

Вероятно, учащиеся заметят сами, что площадь криволинейной трапеции является здесь первообразной (одной из первообразных) от соответствующей функции $f(x)$. Верна ли такая закономерность для любой функции? Прежде чем ответить на этот вопрос, нужно научиться измерять площади криволинейных фигур

(трапеций). Ведь, по сути дела, в школьном курсе до этого вопроса имели дело либо с площадями прямолинейных фигур, либо с площадями круга и его частей (секторов и сегментов).

4. Обратимся к общему случаю функции $y=f(x)$. На этот раз достаточно требовать от нее непрерывности (если это понятие не вводилось, то можно по-прежнему считать ее просто дифференцируемой). Рассмотрим сейчас общий способ, позволяющий определить площадь криволинейной трапеции N_0NM как предел площадей некоторой последовательности прямолинейных фигур. Но в отличие от случая круга фигуры эти не будут здесь правильными многоугольниками. Вместо них надо ввести ступенчатые фигуры, составленные из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат (рис. 4).

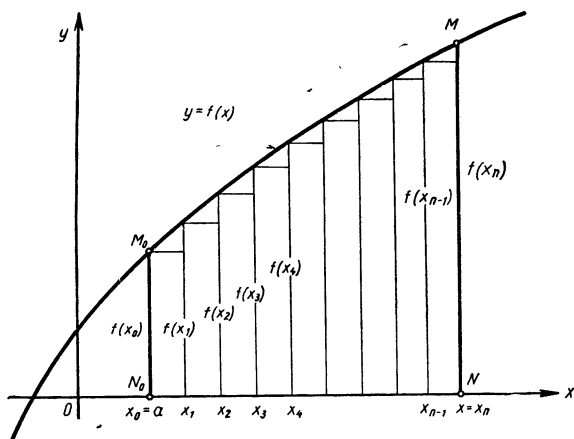


Рис. 4

Чтобы получить такую фигуру, вставляют между точками N_0 и N на оси абсцисс некоторое число $n-1$ промежуточных точек (n — натуральное число; на рисунке взято $n=9$) с абсциссами x_1, x_2, \dots, x_{n-1} и для каждой проводят ординату соответствующей точки графика. Ординаты эти делят всю фигуру на полоски, которые мы заменяем прямоугольниками, с высотами, равными ординатам какой-либо точки графика в пределах соответствующей полоски. На нашем рисунке для каж-

дой полоски взяты ординаты крайних левых точек. Если положить по аналогии $x_0 = a$ и $x_n = x$, то для площади полученной ступенчатой фигуры найдем следующее выражение:

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + \\ + \dots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Если положить для краткости $x_1 - x_0 = \Delta x_0$, $x_2 - x_1 = \Delta x_1$, ..., $x_n - x_{n-1} = \Delta x_{n-1}$, то это выражение короче запишется так:

$$f(x_0) \Delta x_0 + f(x_1) \Delta x_1 + f(x_2) \Delta x_2 + \dots + f(x_{n-1}) \Delta x_{n-1}.$$

Выражение такого вида называют *интегральной суммой*. Очевидно, что интегральная сумма зависит не только от функции $f(x)$, но и от сегмента с концами a и x и выбранных на нем точек подразделения x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Будем переходить от одного подразделения к другому, следя за тем, чтобы наибольшая из разностей между двумя соседними значениями x стремилась к нулю (можно, например, делить сегмент последовательно на 2, на 3, ..., вообще, на n равных частей и неограниченно увеличивать n). Если для каждого подразделения построить соответствующую интегральную сумму, то можно доказать, что последовательность таких сумм будет стремиться к определенному пределу, не зависящему от того, как выбирались подразделения. Иными словами, справедливо следующее предложение, которое в школьном курсе математики принимается без доказательства.

Теорема 2. Если $f(x)$ — функция непрерывная на отрезке с концами a и x , то любая последовательность интегральных сумм, построенных для подразделений этого отрезка, стремится к пределу при условии, что наибольшая ширина полосы (наибольшее расстояние между двумя соседними точками подразделения) стремится к нулю.

Предел этот не зависит от того, какие подразделения отрезка использовались для построения интегральных сумм. Он не зависит от того, какие из ординат точек графика, принадлежащих данной полоске, выбирались в качестве высоты соответствующего прямоугольника ступенчатой фигуры. Например, можно было бы для построения интегральной суммы пользоваться ор-

динатами точек графика, принадлежащих правому краю каждой полоски (рис. 5).

Этот предел называется *определенным интегралом* (от латинского «integer» — целый, весь) от функции $f(x)$,

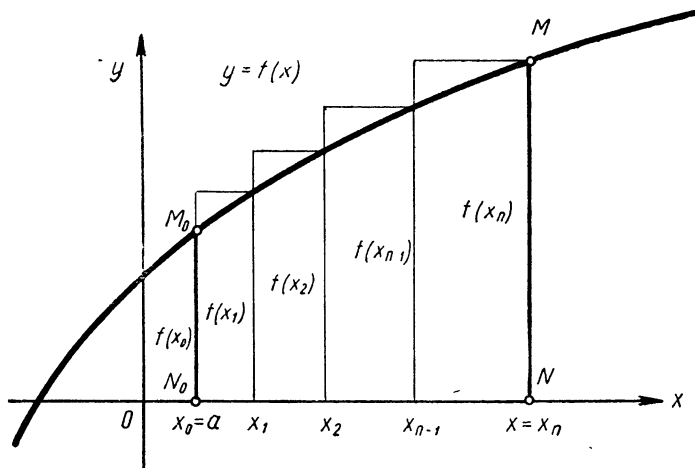


Рис. 5

взятым в пределах от a до x , и обозначается следующим символом:

$$\int_a^x f(x) dx.$$

Здесь знак \int называется знаком *интеграла*, числа a и x — его *пределами*, функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*. Читается этот символ так: «интеграл от a до x эф от x дэ x ». Его можно рассматривать как условное напоминание о виде тех интегральных сумм, пределом которых интеграл является. Именно знак интеграла, представляющий сильно удлиненное латинское S , напоминает о сумме; а $f(x)dx$ напоминает о виде каждого слагаемого интегральной суммы — произведение значения функции на разность (differentia) двух значений x . Эпитет «определенный», приданный интегралу, подсказывает, что интеграл может быть и неопределенным, но об этом ниже.

Вместе с определением мы получаем и способ для вычисления определенного интеграла: ведь если инте-

грал есть предел интегральных сумм, то для его приближенного вычисления можно воспользоваться одной из них. Естественно ожидать, что результат будет тем точнее, чем уже максимальная ширина полосок, на которые разбивается криволинейная трапеция.

Теперь можно дать определение площади криволинейной трапеции.

Площадью криволинейной трапеции под графиком функции $y=f(x)$ на отрезке от a до x называется интеграл $\int_a^x f(x)dx$, т. е.

$$S_a^x = \int_a^x f(x) dx.$$

Это определение можно применить и к вычислению площади четверти круга с радиусом, равным единице. Так как ее можно рассматривать как площадь под графиком функции $y = \sqrt{1-x^2}$ на отрезке от 0 до 1, то получаем для нее

$$S_0^1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Для приближенного вычисления разделим отрезок $[0,1]$ на 10 равных частей и построим интегральную сумму, соответствующую ступенчатой фигуре, изображенной на рис. 6. Получим

$$S_0^1 \approx 0,1 (\sqrt{1} + \sqrt{0,99} + \sqrt{0,96} + \sqrt{0,91} + \sqrt{0,84} + \\ + \sqrt{0,75} + \sqrt{0,64} + \sqrt{0,51} + \sqrt{0,36} + \sqrt{0,19}) .$$

Округляя значения квадратных корней (из таблицы квадратных корней) с точностью до 0,005, найдем

$$S_0^1 \approx 0,1 (1,00 + 1,00 + 0,98 + 0,95 + 0,92 + 0,87 + 0,80 + \\ + 0,71 + 0,60 + 0,44) = 0,83.$$

Получилось приближение с избытком, довольно грубое (истинное значение $S_0^1 = \frac{\pi}{4} = 0,785\dots$). Если на рис. 6 заменить выходящие прямоугольники входящими (брать в качестве высоты каждого прямоугольника ординату точки окружности, лежащей на правом краю

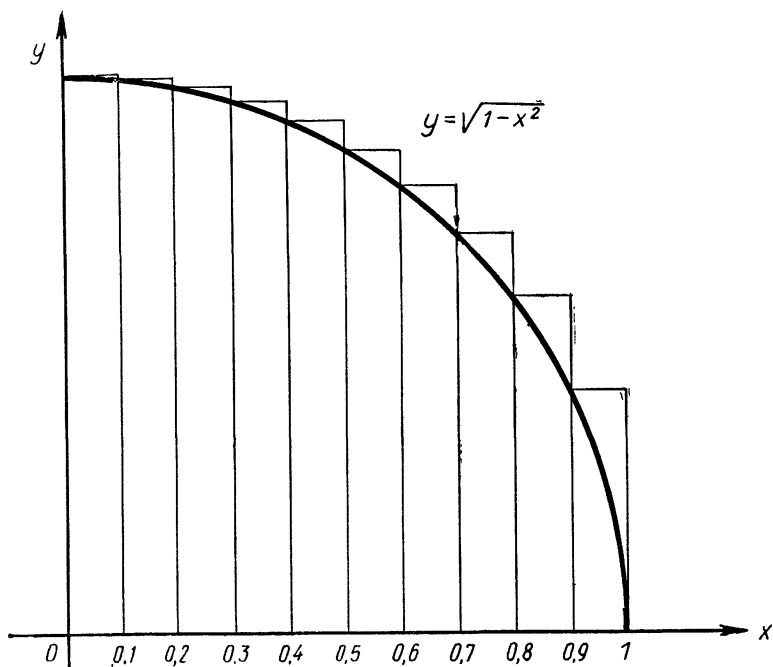


Рис. 6

полоски), то получится приближение с недостатком:

$$S_0^1 \approx 0,1 (1,00 + 0,98 + 0,95 + 0,92 + 0,87 + 0,80 + 0,71 + \\ + 0,60 + 0,44 + 0,00) = 0,73.$$

Лучшие результаты получаются, если делить отрезок $[0,1]$ не на 10, а, например, на 100 равных частей. Вычислительная работа при этом, конечно, усложнится: придется складывать сто значений квадратного корня.

Во многих случаях для вычисления значений интегралов существует гораздо более простой и легкий способ, чем подсчет интегральных сумм. Этот способ основывается на следующей теореме.

Теорема 3. *Определенный интеграл $\int_a^x f(x)dx$, где $f(x)$ — непрерывная функция, является одной из перво-*

образных подынтегральной функции. Иными словами, если $\int_a^x f(x)dx = F(x)$, то $F'(x) = f(x)$.

Доказательство. Приведем доказательство для частного случая, когда функция $f(x)$ монотонна (возрастает или убывает) и график ее есть кривая, выпуклая кверху (или книзу). Рассмотрим, например, случай, изображенный на рис. 7. Значение определенного интеграла

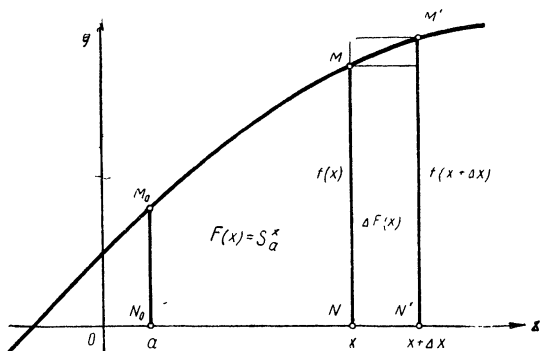


Рис. 7

$F(x)$ представляется площадью криволинейной трапеции N_0MM_0 . Величина $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x)$ представляется площадью криволинейной трапеции (полоски) $NN'M'M$ (заметим, что на нашем чертеже $\Delta x > 0$ и $\Delta F(x) > 0$; если взять $\Delta x < 0$, то и $\Delta F(x)$ будет отрицательным числом). Имеем

$$f(x) \Delta x < \Delta F(x) < f(x + \Delta x) \Delta x,$$

откуда

$$f(x) < \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} < f(x + \Delta x)$$

$$\text{и } 0 < \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} - f(x) < f(x + \Delta x) - f(x).$$

Но $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \rightarrow 0$, если Δx стремится к нулю (функция непрерывна); следовательно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x), \text{ т. е. } F'(x) = f(x).$$

Отсюда видно, что закономерность, подмеченная ранее на примерах ($f(x) \equiv 1$, $f(x) \equiv x$), верна всегда: площадь криволинейной трапеции $S_a^x = \int_a^x f(x) dx$ является первообразной функции $f(x)$.

Теорема 3 позволяет вычислять определенный интеграл (и площадь криволинейной трапеции) всякий раз, когда мы умеем находить первообразную подынтегральной функции. Рассмотрим, например, площадь ONM

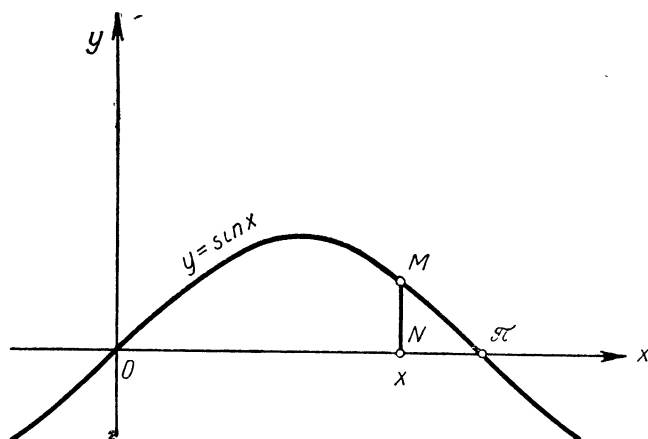


Рис. 8

под синусоидой (рис. 8). По определению площади имеем

$$S_0^x = \int_0^x \sin x \, dx,$$

и по теореме 3

$$\left(\int_0^x \sin x \, dx \right)' = \sin x.$$

Следовательно, S_0^x является первообразной от $\sin x$. Так как одна из таких первообразных есть $\cos x$, то по теореме 1

$$S_0^x = -\cos x + C,$$

где C — константа. Чтобы найти C , положим $x=0$; тогда

S_0^x обратится в нуль, а $\cos x$ — в 1. Будем иметь $0 = -1 + C$, откуда $C = 1$ и $S_0^x = 1 - \cos x$. В частности, получаем

$$S_0^{\pi/2} = 1 - \cos \frac{\pi}{2} = 1, \quad S_0^\pi = 1 - \cos \pi = 2, \quad S_0^{2\pi} = 1 - \cos 2\pi = 0$$

(пусть учащийся объяснит последний результат).

Чтобы облегчить вычисление площадей с помощью первообразных, следует вывести еще как следствие из теорем 3 и 1 формулу Ньютона—Лейбница. Она выражает значение определенного интеграла в виде разности двух значений одной и той же первообразной функции. Сформулируем ее в виде отдельной теоремы.

Теорема 4. Если $\Phi(x)$ какая либо первообразная (непрерывной) функции $f(x)$, то

$$\int_a^x f(x) dx = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Доказательство. По теореме 3 определенный интеграл $\int_a^x f(x) dx$ является одной из первообразных функции $f(x)$. По теореме 1 эта первообразная может отличаться от $\Phi(x)$ — другой первообразной — только на константу. Поэтому

$$\int_a^x f(x) dx = \Phi(x) + C.$$

Чтобы определить C , полагаем в этом тождестве $x = a$; тогда определенный интеграл обратится в нуль и будем иметь $0 = \Phi(a) + C$, откуда $C = -\Phi(a)$.

Подставляя найденное значение C в формулу для $\int_a^x f(x) dx$, найдем окончательно

$$\int_a^x f(x) dx = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Формула Ньютона—Лейбница доказана.

Заметим в заключение, что термином неопределенный интеграл часто обозначают общее выражение для всех первообразных функции $f(x)$.

Так как по теореме 3 одна из первообразных есть $\int_a^x f(x)dx$, то неопределенный интеграл имеет вид

$$\int_a^x f(x) dx + C,$$

где C — произвольная константа. Очевидно, что выбор точки a при этом безразличен. Если вместо одного a взять какое-либо другое число a' (из интервала, на котором функция $f(x)$ непрерывна), то неопределенный интеграл можно представить в виде

$$\int_{a'}^x f(x) dx + C'.$$

В силу этой независимости неопределенного интеграла от выбора точек a и a' при записи вовсе опускают обозначение пределов интегриации и пишут просто $\int f(x)dx + C$, или еще короче $\int f(x)dx$ (в последнем случае константа интегриации подразумевается).

Подчеркнем еще раз, что *понятие неопределенного интеграла функции $f(x)$ совпадает с понятием множества всех первообразных этой функции*. Например,

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C \text{ и т. д.}$$

5. Сказанным выше исчерпывается теоретическое содержание темы «Интеграл» в школьном курсе. Остается привести небольшое собрание упражнений и задач, дополняющих ранее указанные.

А. К понятию первообразной

Задача 1. Найти все функции $f(x)$, для которых касательная в точке с абсциссой x (любой из интервала, в котором функция может быть определена) составляет с осью абсцисс угол, тангенс которого равен соответственно

а) 1; б) x ; в) x^2 ; г) $\cos x$; д) $\sin x$; е) e^x ; ж) $\frac{1}{x}$ ($x > 0$).

Задача 2. Пусть в условиях задачи 1 тангенс угла касательной с осью абсцисс равен $x^2 - 5x + 6$ (x — абсцисса точки касания). Укажите интервалы, в которых соответствующая функция $f(x)$: а) убывает; б) возрастает; в) в каких точках функция имеет максимум? минимум? г) можете ли вы по данным задачи вычислить значение функции в точке максимума? д) определите, насколько значение в точке максимума превышает значение в точке минимума?

Указание к вопросу г): заметьте, что функция $f(x)$ является первообразной (любой) от функции $x^2 - 5x + 6$.

Задача 3. Для функции $y = |x|$ найдите первообразную, график которой проходит через начало координат. Начертите этот график. **Указание.** Решайте задачу в отдельности для каждой из двух полуосей: $x \geq 0$ и $x \leq 0$.

Б. К понятию определенного интеграла

Задача 4. Вычислите приближенно интеграл $\int_1^2 x^2 dx$, замените

его интегральной суммой, построенной для подразделения сегмента $[1, 2]$ на 10 равных частей.

Задача 5. Пользуясь формулой Ньютона—Лейбница, вычислите следующие определенные интегралы: а) $\int_1^2 x^2 dx$; б) $\int_a^b x^2 dx$

в) $\int_2^3 (x^2 - 5x + 6) dx$; г) $\int_0^1 (1 + x + x^2 + \dots + x^n) dx$, где n — натуральное

число; д) $\int_{-2}^5 |x| dx$ (первообразная функция для $|x|$ найдена в задаче 3; получите тот же результат, пользуясь истолкованием интеграла

как площади под графиком); е) $\int_a^b |x| dx$ ($a < b$); ж) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$.

з) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$; и) $\int_0^{\pi} (\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx) dx$ (n — натуральное число); к) $\int_0^{\ln 2} e^x dx$; л) $\int_1^n \frac{dx}{x}$ (n — натуральное число).

Задача 6. Сравните значения $\int_0^{\pi} \sin x dx$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$. Изоб-

разите на чертеже криволинейные трапеции, площади которых выражены этими интегралами. Как изменится обнаруженное соотношение, если во втором интеграле число 2 заменить другим натуральным числом n (не забудьте произвести замену и в верхнем пределе интеграла)?

Задача 7. Используя формулу Ньютона—Лейбница, докажите, что

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Объясните этот результат, истолковывая определенный интеграл как площадь криволинейной трапеции.

Задача 8. Если a , b и c три точки на оси абсцисс, принадлежащие некоторому интервалу, на котором функция непрерывна, то справедлива формула

$$\int_a^b b(x) dx = \int_a^c b(x) dx + \int_c^b b(x) dx.$$

Указание. Воспользуйтесь формулой Ньютона—Лейбница. Объясните полученный результат, предполагая для определенности, что $a < c < b$.

Задача 9. При обозначениях задачи 8 докажите, что всегда

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = 0.$$

Задача 10. Объясните, почему ответ на вопрос д) задачи 2 отличается только знаком от результата в) задачи 4?

Задача 11. Сравните интегралы $\int_1^a \frac{dx}{x}$ и $\int_k^{ka} \frac{dx}{x}$ где $a > 0$ и

$k > 0$. Полагая для определенности $a=2$ и $k=3$, постройте криволинейные трапеции, площади которых выражаются этими интегралами. Заменяя приближенно каждую из них ступенчатой фигурой, с одним и тем же числом ступенек n , попытайтесь понять, почему площади рассматриваемых криволинейных трапеций равны между собой.

Задача 12. Пусть точка движется по оси абсцисс по закону $x=f(t)$ (t — время). Обозначим через $v=g(t)$ скорость, а через $a=h(t)$ — ускорение точки в любой момент времени. Выведите формулы

$$\int_{t_1}^{t_2} v dt = f(t_2) - f(t_1), \quad \int_{t_1}^{t_2} a dt = g(t_2) - g(t_1),$$

где t_1 и t_2 — какие-либо моменты времени. Примените эти формулы к частному случаю равноускоренного прямолинейного движения (a — константа).

Задача 13. Пусть точка движется по прямой со скоростью $v=v_0 \cos kt$, где v_0 — скорость в момент времени $t=0$. Определит-

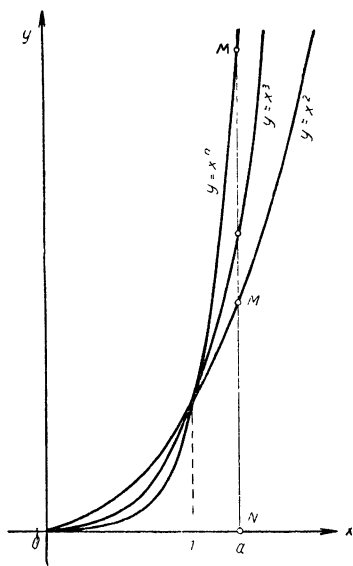


Рис. 9

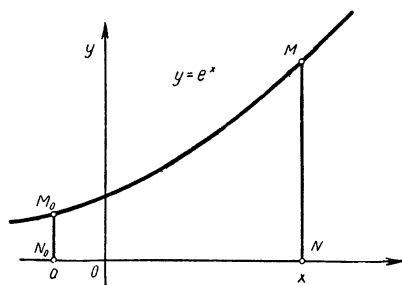


Рис. 10

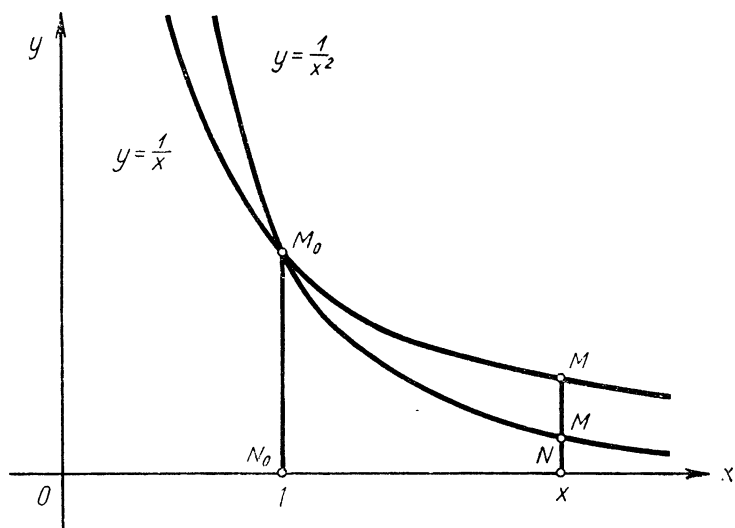


Рис. 11

те расстояние между двумя положениями точки в моменты времени t_1 и t_2 .

Задача 14. Вычислите площадь S_0^a , лежащую под графиками: а) $y=x^2$; б) $y=x^3$; в) $y=x^4$ (рис. 9). Сравните найденные результаты с площадью соответствующего треугольника OMN . Объясните, как дело будет обстоять в общем случае площади S_0^a под графиком функции $y=x^n$ (n — натуральное число).

Задача 15. Найдите площадь S_a^x под графиком функции $y=e^x$ (рис. 10).

Найдите предел $\lim_{a \rightarrow -\infty} S_a^x$. Как его можно истолковать геометрически?

Задача 16. Существует ли предел площади S_1^x под графиком функции $y=\frac{1}{x}$ при условии, что x стремится к бесконечности?

Аналогичный вопрос для площади под графиком функции $y=\frac{1}{x^2}$ (рис. 11).

Как вы объясните различие в ответах в этих двух случаях?

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркушевич А. И., Сикорский К. П., Черкасов Р. С. Алгебра и элементарные функции. М., «Просвещение», 1968, гл. XX.

2. Маркушевич А. И. Интегрирование. — «Математика в школе», 1968, № 4, стр. 43—53.

3. Маркушевич А. И. Логарифмическая и показательная функции в школе. — «Математика в школе», 1965, № 3, стр. 43—51.

4. Маркушевич А. И. Вывод формул и объемов геометрических тел в X классе с использованием производной. — «Математика в школе», 1965, № 6, стр. 21—24.

И. М. ЯГЛОМ,
доктор физико-математических наук

АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ОБОСНОВАНИЯ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ



Вопрос о построении курса геометрии в старших классах средней школы является самым сложным из всех, которые ставят перед нашей методикой математики новые школьные программы. В самом деле, при перестройке курса алгебры, направленной на включение в этот курс элементов математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисление), была возможность опереться на обширный международный и даже на некоторый отечественный опыт. Так в утвержденной в 1920 г. программе Единой трудовой школы (десятилетней) были элементы математического анализа, которые предполагалось изучать в выпускном классе, в соответствии с чем было выпущено довольно удачное, на мой взгляд, пособие А. П. Киселева [15], выдержавшее несколько изданий. В 1933—1934 гг. идея обогащения школьного курса математики элементами математического анализа вновь возродилась и в соответствии с этим была выпущена также неоднократно переиздававшаяся книга С. А. Гальперна и И. И. Привалова [9], составлявшаяся авторами как учебник для средней школы¹.

¹ Здесь не рассматривается опыт дореволюционной русской средней школы, а между тем курс математики, преподававшийся в существующих в нашей стране до 1917 г. так называемых «реальных училищах», включал раздел, посвященный математическому анализу, в соответствии с чем был выпущен целый ряд школьных учебников, содержащих элементы дифференциального и интегрального исчисления.

В противоположность этому серьезных попыток модернизации школьного курса геометрии русская школа не знала. В ряду же весьма различных по подходам зарубежных попыток перестройки школьного курса геометрии (о некоторых из них будет сказано ниже) ни одну нельзя признать полностью удавшейся (это свидетельствует о трудности стоящей перед математиками и методистами задачи, поскольку среди лиц, бравшихся за ее решение, было немало первоклассных ученых и педагогов). В поисках возможных путей решения этой назревшей методической задачи и анализа возникающих здесь трудностей естественно прежде всего обратиться к истории попыток строгого обоснования (евклидовой) геометрии.

§ 1. ТРИ ОСНОВНЫХ ПУТИ ОБОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ: М. ПИЕРИ, Д. ГИЛЬБЕРТ, В. Ф. КАГАН

Задача строго аксиоматического обоснования всей геометрии была впервые поставлена (и решена) на рубеже XIX и XX столетий; до этого задача в таком виде даже и не ставилась. Несмотря на то, что сегодня аксиоматический метод в нашем сознании чаще всего связывается именно с геометрией, исторически аксиоматическая трактовка *арифметики*, принадлежащая Дж. Пеано (ср. [3]), возникла ранее первых попыток обоснования геометрии, а именно в 1891 г. Известно, что первая серьезная попытка аксиоматического обоснования науки была предпринята (Евклидом) именно на примере геометрии. Это обстоятельство сильно задержало дальнейшее движение вперед: колоссальный авторитет Евклида и многовековая привычка видеть в его книге образец «истинно дедуктивной» математической системы затрудняли понимание принципиальных пороков принятой Евклидом схемы (чуждой, как известно, представлениям о «первоначальных», или «неопределяемых», объектах и отношениях).

Другой причиной задержки учения об основаниях геометрии явилась, очевидно, сложность подлежащей аксиоматизации математической системы. В то время как аксиоматика арифметики по Дж. Пеано содержала

всего четыре аксиомы, описывающие один род неопределяемых понятий («числа») и одно отношение между этими понятиями («предшествовать»), гильбертова аксиоматика, даже в одном из последних ее вариантов (см. [10]), содержит 20 аксиом (первоначально число аксиом было еще большим), описывающих четыре основных отношения (*принадлежать, между и конгруэнтность для отрезков и для углов*), связывающие неопределяемые элементы трех родов — *точки, прямые и плоскости*.

Не удивительно поэтому, что первым попыткам серьезного обоснования всей геометрии Евклида предшествовали работы, в которых обсуждались отдельные фрагменты будущей аксиоматики. Из числа этих работ

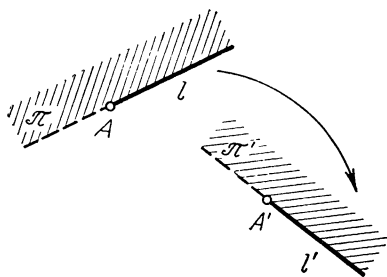


Рис. 1

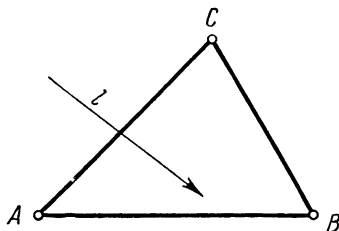


Рис. 2

особо должны быть отмечены исследования Дезюппе Пеано по аксиоматизации понятия *движения*; в частности, Пеано принадлежит вошедшее в многие последующие исследования описание «степени подвижности» плоскости: *существует единственное движение, переводящее данный «репер» (A, l, π) в другой «репер» (A', l', π')* (рис. 1). Большое значение имели также исследования Морица Паша по аксиоматическому описанию *порядка точек на прямой*, включающему широко известную аксиому Паша: *если прямая пересекает одну сторону треугольника, то она обязательно пересекает и одну из двух других его сторон* (рис. 2).

История науки свидетельствует, что великие открытия делаются, как правило, в тот период, когда имеются объективные факторы. При этом роль «гениальных оди-

ночек» оказывается вовсе не столь уже большой, ибо весьма часто существенный шаг вперед делается независимо учеными в разных странах: «Для идей, — писал венгерский математик Фаркаш Бойаи сыну Яношу, — наступает время, когда они созревают в различных местах, подобно тому как весной фиалки появляются всюду, где светит солнце». В качестве примеров здесь можно указать на независимое открытие *аналитической геометрии* Р. Декартом и П. Ферма, *математического анализа* Г. В. Лейбницем и И. Ньютоном, *неевклидовой геометрии* Н. И. Лобачевским, Я. Бойаи и К. Ф. Гауссом, *векторного исчисления* Г. Грасманом и У. Р. Гамильтоном, *статистической физики* Л. Больцманом и Д. У. Гиббсом, (специальной) *теории относительности* А. Эйнштейном и А. Пуанкаре, *квантовой механики* Л. де Бройлем, Э. Шредингером и В. Гейзенбергом и т. д. и т. п.

Не составляет исключения и аксиоматическое обоснование (евклидовой) геометрии. Разные системы обоснования геометрии, формально эквивалентные и равно достаточные для вывода из предложенных аксиом всех без исключения геометрических теорем, были независимо предложены несколькими учеными, из числа которых особо следует отметить итальянского математика Марио Пьерри [33], профессора прославленного Гёттингенского университета Давида Гильберта [10] и приват-доцента Новороссийского (Одесского) университета Вениамина Федоровича Кагана [14].

Эта статья не посвящена истории науки и поэтому в ней неуместно задерживаться на приоритетных вопросах (как будто, первая публикация, содержащая полную систему обоснования геометрии, принадлежала М. Пиери, Д. Гильберт был вторым, а В. Ф. Каган — третьим). Впрочем, на дальнейшей эволюции соответствующих идей соображения приоритета никак не отражались. Из трех рассматриваемых работ две (Пиери и Кагана) сразу же оказались основательно забытыми, так что сегодня их знают лишь специалисты по истории математики или по основаниям геометрии, а третья работа (работа Гильберта [10]) почти сразу же приобрела весьма почетную известность. Она выдержала десятки изданий на языке подлинника и в переводах и послужила основой для деятельности многочисленных

исследователей буквально во всех странах мира, стараниями которых предложенная Д. Гильбертом система обоснования геометрии многократно упрощалась и совершенствовалась.

В чем же коренятся причины столь широкого увлечения аксиоматической системой Гильберта? Прежде всего — в высоких научных и методических достоинствах его системы; так, например, большое значение имело разбиение всей системы аксиом на ряд групп, анализирующих отдельные категории свойств евклидова пространства. Значительную роль здесь сыграл также огромный научный авторитет автора книги [10] — бесспорно, первого математика своего времени, внесшего выдающийся вклад чуть ли не во все направления современной ему математики и заложившего основы грядущих успехов математической науки. Наконец, очень существенной была близость основных установок Гильберта к классическим «Началам» Евклида [13], позволяющая рассматривать книгу Гильберта как завершение растянувшегося на несколько тысячелетий пути развития геометрии: от древних египтян и вавилонян — к «Началам» Евклида и от «Начал» — к «Основаниям геометрии» Гильберта¹.

Между тем анализируя сегодня три первоначально предложенных пути обоснования геометрии, можно сказать, что наименее удачным из них был именно путь Гильберта. «Основания геометрии» сыграли выдающуюся роль в формировании наших представлений о месте аксиоматического метода в математике и послужили трамплином для создания «гильбертова формализма», явившегося одним из важнейших направлений в области оснований (в частности, философских оснований) математики, однако собственно геометрию эта книга в определенном смысле завела в тупик и здесь принесла, быть может, больше вреда, чем пользы. Для пояснения этой точки зрения остановимся подробнее на основных установках М. Пиери, Д. Гильберта и В. Ф. Кагана.

В чисто *математическом* отношении предложенные этими тремя авторами системы аксиом равносильны: приняв за основу любую из них, можно на этой базе

¹ Именно так трактует историю оснований геометрии известный математик, педагог и историк науки Ганс Фрейденваль [31].

доказать все предложения, рассматриваемые как аксиомы в двух других системах. Однако с точки зрения *методической* (и *методологической*) различие между аксиоматическими системами Пiere, Гильберта и Кагана довольно значительно — и эти три системы наметили три основных пути обоснования евклидовой геометрии.

Различия между аксиоматиками Пiere, Гильберта и Кагана начинаются с самого начала: так, например, неопределяемыми объектами геометрии по Пiere и Кагану являются лишь *точки*, а по Гильберту — также и *прямые*, и *плоскости*. Однако это различие не является особенно принципиальным: схему Гильберта легко трансформировать так, чтобы прямые и плоскости приобрели структуру точечных множеств. Гораздо более принципиальным является различие в путях реализации «метрической структуры» плоскости или пространства, отличающей, скажем, евклидову плоскость от лишенной расстояний между точками и углов между прямыми аффинной плоскости (по поводу которой см. [26] или стр. 126). Д. Гильберт учитывал эту структуру, аксиоматизируя понятие *равенства* (или *конгруэнтности*) отрезков и углов; М. Пiere вслед за своим учителем Дж. Пеано считал основным (неопределяемым) понятием *движение*, а В. Ф. Каган исходил из понятия *расстояния* между точками.

Разумеется, эти три подхода приводят к одному и тому же понятию евклидова пространства: ведь владея любым из них, можно определить оба другие и доказать все их свойства. Так, например, исходя из понятия равенства (конгруэнтности) отрезков можно определить *движение* δ как преобразование, переводящее любые две точки A и B в такие точки A' и B' , что отрезки AB и $A'B'$ равны (рис. 3); можно также определить *длину отрезка* (т. е. *расстояние* между точками) как такое число, что длины равных отрезков совпадают и длина суммы двух отрезков равна сумме их длин (ср. [12]). Аналогично этому, если считать основным понятием движение, то *равенство* фигур F и F' (например, двух отрезков или двух углов) определяется существованием движения δ , переводящего F в F' , а *расстояние* между точками возникает как «инвариант движений». Наконец, если исходить из понятия расстояния (или длины отрезка), то *равенство* отрезков за-

дается равенством их длин, а движение можно определить как преобразование, сохраняющее расстояния между точками (см. рис. 3, где расстояния AB и $A'B'$ рав-

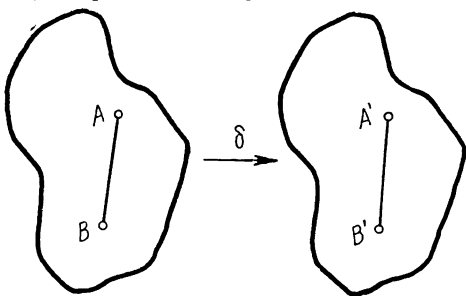


Рис. 3

ны). Таким образом, эквивалентность трех систем обоснования геометрии устанавливается без труда¹. Различие же между ними заключается в том, какое именно из трех понятий: конгруэнтность — движение — расстояние считается «самым главным». Но само представление о сравнительной «важности» того или иного понятия, разумеется, не имеет никакого отношения к математической науке; в методологии (и в методике) математики оно, напротив, заслуживает самого серьезного внимания.

§ 2. РАВЕНСТВО ФИГУР, ДВИЖЕНИЕ И РАССТОЯНИЕ В СИСТЕМЕ ГЕОМЕТРИИ ЕВКЛИДА

Основные установки, которыми руководствовался Гильберт в своих исследованиях по основаниям геометрии, тесно связаны с построениями Евклида. В частности, основополагающая роль понятия равенства (конгруэнтности) фигур в системе Гильберта имеет

¹ Зачастую встречающаяся в этих вопросах путаница хорошо иллюстрируется нелепой «аксиомой», фигурирующей в некогда достаточно популярном у нас учебнике [20] (не путать его с безупречным в научном отношении учебником [19]): *равными фигурами называются такие, которые при наложении совмещаются*, — это у автора не определение равных фигур и не определение движений («наложений»), а именно аксиома!

своим источником «Начала» Евклида, в которых понятие равенства фигур тоже является «самым первым» — недаром «типичное доказательство» Евклида всегда сводится к рассмотрению цепочек из пар равных треугольников: « $\triangle ABC = \triangle DEF$, поскольку...; следовательно, $\triangle UVW = \triangle XYZ$, ибо...» и т. д.

Эта система изложения геометрии возникла как отражение в рамках развиваемых Евклидом построений метафизических воззрений Аристотеля, верным учеником которого был Евклид. В самом деле, критика софистов, чаще всего связываемая с именем Зенона¹, заставила Аристотеля признать невозможным изучение «процессов» и ограничиться рассмотрением застывших «состояний». Безупречным примером таких «состояний» Евклид считал свои чертежи с их равными и неравными треугольниками.

Однако диалектика учит нас, что основной интерес для науки составляют не «состояния», а именно «процессы». Отражением этой диалектики в математике являются те ее разделы, которые были созданы трудами великих ученых XVII в. — Рене Декарта и Пьера Ферма, Исаака Ньютона и Готфрида Вильгельма Лейбница. И с этой точки зрения подход Дж. Пеано и М. Пиери имеет определенные преимущества перед подходом Гильберта, ибо этот подход с самого начала вводит в геометрию отвергавшееся Евклидом с его метафизических позиций понятие движения, связывающее геометрию с физикой и с «высшей математикой» Ньютона и Лейбница.

Следует, разумеется, иметь в виду, что сам термин «движение» имеет в геометрии и в физике несколько разный смысл; в этой связи авторы учебника [17] предлагают даже изгнать этот термин из геометрии, заменив его термином «перемещение» (это предложение заслуживает, по-моему, серьезного внимания). В самом деле, в физике движение — это всегда протекающий во времени *процесс*, позволяющий говорить, например, о траекториях или о скоростях отдельных точек. В геометрии же под движением понимается лишь *соответствие* между точками или *отображение*, переводящее каждую точку

¹ Зенон спрашивал: «Можете ли вы указать, где находится кончик летящей стрелы?»

A в новую точку A' , так что вопрос, скажем, о траектории точки не имеет здесь никакого смысла.

Однако тесная связь между этими двумя понятиями совершенно очевидна. С другой стороны, понимание движения δ как отображения

$$A \xrightarrow{\delta} A'$$

связывает геометрию с понятием *функции*, являющимся основным для математического анализа (дифференциального и интегрального исчисления)¹. Наконец, признание основной роли движений в геометрии в своем дальнейшем развитии приводит к чрезвычайно общим теоретико-групповым концепциям, по-новому освещающим сущность геометрической науки².

Обратимся теперь к понятию *расстояния*. В начале нашего века, когда В. Ф. Каган строил свою систему обоснования геометрии, понятие расстояния казалось второстепенным, а идея привлечения в геометрию понятия числа, каким является расстояние между точками, — спорной и нарушающей «чистоту» геометрического метода. Это и определило невнимание к исследованиям Кагана. Так, в подытожившем целый период исследований по основаниям геометрии обзоре ([23] стр. 34) видного представителя итальянской логической школы Федерико Энрикеса³ о работе [14] сказано: «Дедукция Кагана прозрачна и постулаты довольно просты, но простота эта достигается благодаря допущению, что расстояние может быть прямо выражено некоторым числом, причем допущение это должно, в частности, заменить основные понятия расположения по порядку». Таким образом, в обращении к понятию числа (что позволило избежать громоздкой теории порядка точек на

¹ См. стр. 93—113 настоящего сборника.

² Здесь имеется в виду «Эрлангенская программа» Феликса Клейна, согласно которой отдельные ветви геометрии (о которых см. стр. 125—127 этого сборника) различаются тем, какие преобразования играют в них роль движений (см. Введения к трем частям книги [24] или § 6 статьи [25]; ср. также стр. 124—128).

³ Этот обзор был напечатан в многотомной «Энциклопедии математических наук», составленной широким международным коллективом ученых по инициативе и под общим руководством Ф. Клейна и весьма обстоятельно проанализировавшей все достижения (чистой и прикладной) математики, накопленные к началу XX в.

прямой по М. Пашу) Энрикес видит не достоинство развиваемых Каганом построений, а их недостаток!

Однако сегодня математики совсем по-другому относятся к выражению «чистота геометрического метода», ибо стремление отгородить геометрию «китайской стеной» от алгебры и анализа воспринимается как неосуществимое и вредное: ведь наибольшие успехи науки в XX в. возникли на путях смелого сопоставления фактов и понятий, заимствованных из совершенно разных областей, и были достигнуты в тех направлениях, которые являются смежными для нескольких научных дисциплин. Объединение в один комплекс многих ранее считавшихся весьма далекими друг от друга разделов математики, научного естествознания и социальных наук привело к появлению нового направления мысли, ныне обозначаемого собирательным термином «кибернетика», а на путях борьбы против разобщенности отдельных математических дисциплин возникала пользующаяся таким влиянием в научном мире школа «Николá Бурбаки»¹. И не случайно в большинстве стран мира ныне нет деления школьного курса математики на отдельные «предметы», а в некоторых государствах (Франция, Италия) уже и на математических факультетах университетов изучается единый курс «математики».

Так же и место, занимаемое в геометрии понятием расстояния, сегодня совсем уже не то, каким было оно в начале века. Важность понятия расстояния и перспективность теорий, базирующихся на этом понятии, продемонстрировало создание французским ученым Рене Морисом Фреше общего понятия *метрического пространства* — такого множества M «точек», что каждым

¹ Под этим коллективным псевдонимом скрывается обширная и высокоавторитетная группа (в первую очередь французских) математиков, выпускающая многотомный учебник «Элементов математики», многие части которого переведены и на русский язык; по поводу основных установок этой группы см. статью [8], первый раздел которой имеет многозначительное название «Математика или математики?» (т. е. единая математическая наука или много разнородных математических дисциплин?). [О группе «Бурбаки» см. [22]; укажем еще на неоднократно отмечавшийся в нашей литературе процесс «бурбакизации» школьного математического образования, захвативший целый ряд стран (в первую очередь Францию, Бельгию и некоторые африканские государства, находящиеся под сильным воздействием французской культуры).]

двум точкам A и B отвечает число AB , называемое «расстоянием» между A и B , причем выполняются следующие аксиомы:

$$P_1. AB > 0 \text{ при } A \neq B, AA = 0;$$

$$P_2. AB = BA;$$

$$P_3. AC + CB \geq AB.$$

Не меньшее значение имели оцененные лишь после появления (общей) теории относительности А. Эйнштейна глубокие исследования Георга Фридриха Бернгарда Римана, явившиеся «математическим фундаментом» теории относительности, основой которой также является своеобразно обобщенная концепция расстояния¹ или выросшие из идей Фреше и построений Римана новые направления геометрических исследований (подобные, скажем, пространствам ограниченной кривизны А. Д. Александрова [2], G -пространствам Г. Буземана [6] или (метрическим) геометриям Минковского² и Гильберта, см. [7]). Не удивительно поэтому, что в то время как книга [10] Гильберта в некотором смысле «закрыла» определенный раздел геометрии, поскольку все последующие работы в этом направлении имели довольно частный характер (именно эту область геометрии сегодня чаще всего связывают с наименованием «Осно-

¹ Лучшим учебником теории относительности и римановой геометрии является знаменитая книга «Пространство, время, материя» Германа Вейля [36], вышедшая в свет в 1918 г. (общая теория относительности была создана в 1916 г.) и затем неоднократно переиздававшаяся и переводившаяся на иностранные языки (к сожалению, не на русский).

² *Пространством* (или *плоскостью*) *Минковского* называется обычное аффинное пространство (аффинная плоскость), снабженное удовлетворяющей аксиомам P_1 — P_3 «метрикой», «согласованной» с аффинной структурой пространства в том смысле, что *кратчайшим расстоянием между двумя точками является соединяющий эти точки отрезок*. Другими словами, метрика должна быть такова, что

P_4 . *Равенство $AC + CB = AB$ означает принадлежность точки C отрезку AB .*

Заметим, что для того, чтобы обратить лишенное метрики аффинное пространство в евклидово, достаточно дополнить аксиомы P_1 — P_4 единственной «аксиомой перпендикулярности»: *П. Отношение перпендикулярности прямых «симметрично»: если $a \perp b$, то и $b \perp a$* (перпендикулярность прямых здесь определяется условием о том, что опущенный на прямую из внешней точки перпендикуляр короче любой из «наклонных»); однако для перехода от аффинной плоскости к евклидовой аксиом P_1 — P_4 и P уже недостаточно.

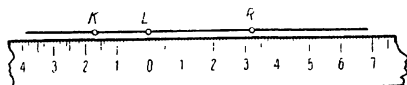
вания геометрии»), работы [33] и [14] открыли новые направления геометрических исследований.

На первом месте среди продолжающих линию Пеано—Пиери работ надо упомянуть вышедшую в 1909 г. в Лейпциге книгу «Основания геометрии» ученика Гильберта Фридриха Шура. Название этой книги не случайно копирует название сочинения Гильберта. Ф. Шур поставил перед собой задачу объединения построений Гильберта с идеями Пеано: не изменяя коренным образом аксиоматику Гильберта, он лишь модифицировал ее, заменив гильбертовы «аксиомы конгруэнтности (равенства)» аксиомами движения, идущими от Дж. Пеано и М. Пиери. Таким образом, предложенная Ф. Шуром система аксиом сохранила все достоинства гильбертовой аксиоматики; преимущество же ее состояло в выдвигании на первый план столь важного для геометрии понятия *движения*. Эти обстоятельства обеспечили аксиоматике Шура широкую популярность; неоднократно освещалась она и в русской учебной и научно-популярной литературе (см., например, рассчитанную на учителей средних школ книгу [11]).

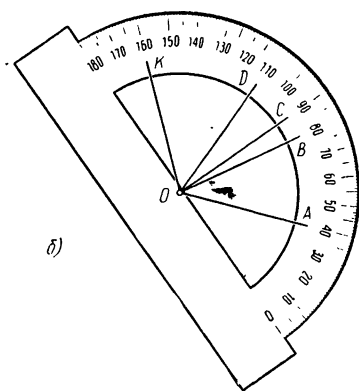
Дальнейшим развитием тех же идей явилось сделанное в 1922 г. немецким педагогом Г. Виллерсом предложение о замене «аксиом движения» Шура *аксиомами симметрии* (они перечислены в вводной статье автора настоящих строк к книге [4]) — в аксиоматике Виллерса основным или неопределяемым понятием является не произвольное движение, а лишь *осевая симметрия*. Не останавливаясь здесь подробнее на длинном ряду систем обоснования геометрии, исходящих из идеи движения, укажем лишь на являющуюся в определенном смысле завершением этого ряда аксиоматику современного немецкого геометра Фридриха Бахмана [4]. В системе Бахмана (осевые и центральные) симметрии являются даже не основными «отношениями», связывающими точки и прямые, служащие главным «строительным материалом» геометрии, а сами принимаются за основные (неопределяемые) объекты геометрии, заменяя тем самым точки и прямые!

Столь же многообещающим оказался и третий путь обоснования геометрии, принимающий за основу понятие *расстояния*. Уже в 1904 г. (всего через два года после опубликования работы [14]) система «метрического» об-

основания геометрии переключалась на другой материк: в этом году оригинальный вариант обоснования (евклидовой) геометрии на базе понятия расстояния предложил один из классиков американской математики Освальд Веблен. В 1908 г. исследования Веблена были продолжены другим американским математиком Р. Л. Муром;



а)



б)

Рис. 4

много внимания уделял также «метрическим геометриям» ученик Гильберта Отто Блюменталь, эмигрировавший из фашистской Германии в Соединенные Штаты. Но наибольшее значение имела опубликованная в 1932 г. в ведущем американском математическом журнале «Annals of Mathematics» статья «Система аксиом планиметрии, базирующаяся на использовании масштабной линейки и транспортира», принадлежащая перу одного из виднейших американских ма-

тематиков и педагогов Джорджа Дэвида Биркгофа. Дж. Д. Биркгоф исходил в своей статье из существования «меры длины» (расстояния) для отрезков (или пар точек) прямой и «меры угла» для углов с фиксированной вершиной, т. е. из таких, примерно, аксиом:

Д₁. При выборе фиксированной «единицы измерения длин» *каждым двум различным точкам прямой можно сопоставить единственное положительное число, называемое расстоянием между этими точками.*

Д₂. *Точки прямой линии можно поставить во взаимно однозначное соответствие с (вещественными) числами так, что расстояние между двумя точками равно абсолютной величине разности отвечающих этим точкам чисел (см. рис. 4, а).*

Д₃. Фигурирующее в аксиоме Д₂ соответствие можно осуществить так, чтобы произвольно заданной точке прямой отвечало число 0.

У₁. Каждым двум различным лучам, исходящим из одной точки О, можно сопоставить единственное положительное число $\alpha \leq 180$, называемое величиной образуемого этими лучами угла; при этом $\alpha = 180$ в том и только в том случае, когда рассматриваемые лучи противоположны.

У₂. Исходящие из фиксированной точки О лучи можно поставить во взаимно однозначное соответствие с непревосходящими 360 неотрицательными числами так, что величина образуемого двумя лучами угла равна абсолютной величине разности отвечающих этим лучам чисел, если эта абсолютная величина не превосходит 180 (рис. 4, б) и равна разности 360 и этой абсолютной величины, если последняя больше 180.

У₃. Фигурирующее в аксиоме У₂ соответствие можно осуществить так, чтобы произвольно выбранному лучу с началом О отвечало число 0.

«Аксиомы масштабной линейки» Д₁—Д₃ и «аксиомы транспорта» У₁—У₃ чрезвычайно удобны тем, что они снимают все трудности, с которыми связаны анализ понятия «порядка» точек на прямой по Шуру—Гильберту (ср. стр. 58—66 и 404—419 книги [10]) и измерение длин отрезков (см. [12]); поэтому система Биркгофа сразу же начала широко использоваться в американских средних школах.

§ 3. РАВЕНСТВО ФИГУР, ДВИЖЕНИЕ И РАССТОЯНИЕ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

Колоссальный авторитет Евклида привел к тому, что пропагандируемая им система изложения геометрии на тысячелетия утвердилась как единственный и не подлежащий критике образец. Так, еще в первой четверти нашего века преподавание геометрии в английских средних школах повсеместно проводилось по так называемым «школьным обработкам» евклидовских начал, в силу чего имя «Евклид» занимало в умах английских школьников примерно то же место, какое

занимала в умах русских школьников фамилия «Киселев»: большинство из них чистосердечно считало Евклида англичанином, на горе им написавшего школьный учебник математики. Значительную роль играли «школьные обработки» Евклида также и во французской, немецкой и (особенно!) итальянской школе. В тех же странах (например, в России), где «Начала» Евклида никогда не рассматривались непосредственно как школьный учебник, влияние этой книги на школьное преподавание было, зачастую, не меньшим, чем в Англии или в Италии.

История борьбы против евклидовского влияния знает чрезвычайно драматичные страницы, вроде убийства, например, в 1572 г. (Варфоломеевская ночь!) изуверами-католиками выдающегося французского ученого и просветителя Рамуса (латинизированная форма имени Пьер де ла Рамé), снискавшего известность темпераментными выступлениями против средневековой схоластики и против геометрии Евклида. Впрочем, убийцы Рамуса не сумели прикончить также его идеи, влияние которых на французскую науку оставалось сильным в течение более чем двух столетий. Наиболее полное воплощение эти идеи нашли в интересном учебнике геометрии знаменитого французского математика XVIII в. Алексиса Клода Клеро, в возрасте 18 лет избранного адъюнктом Парижской академии наук за свои исследования по дифференциальной геометрии; отразились они и на резко «антиевклидовой» по своим основным установкам статье «Геометрия» прославленного Жана Лерона Даламбера, помещенной им в «Энциклопедию», которую он издавал совместно с Дени Дидро.

Линия Рамуса — Клеро во французской методике математики заключается в стремлении подчеркнуть «прикладной» характер геометрии, заостря внимание не на строгой дедукции и не на понятии равенства фигур, а на *метрических* ее аспектах, связанных с измерением длин, площадей и объемов. Эти установки полностью разделялись также Даламбером, новым моментом в статье которого было стремление подчеркнуть также выдающуюся роль, которую играет в геометрии понятие *движения*.

Впрочем, ремесленные и совсем уж чуждые всякой дедукции переработки «Геометрии» Клеро, какими были

многие распространенные во французской школе в конце XVIII в. учебники, вызвали своеобразную реакцию, стимулировав появление книги «Начала геометрии» Адрина Мари Лежандра — быть может, лучшего из всех «школьных вариантов» евклидовских «Начал» за всю историю преподавания. Влияние этого учебника, вышедшего в свет в 1794 г., и затем многократно усовершенствованного автором (книга Лежандра только при жизни ее автора выдержала несколько десятков изданий!) было настолько сильным, что в течение всего XIX в. «метрические идеи» Рамуса—Клеро не дали на французской почве ни одного заслуживающего внимания роста. То же самое можно сказать и о связанной с именем Даламбера линии, характеризующейся повышенным вниманием к движениям — возродилась эта линия во французской школе лишь в нашем столетии, о чем еще будет сказано ниже.

Не останавливаясь столь же подробно на борьбе идей в методике геометрии в других странах, обратимся сразу к русской школе. Господствующий в нашей школе в течение более чем полустолетия учебник А. П. Киселева [16], обладавший выдающимися методическими достоинствами и до сих пор любимый большинством школьных учителей, был чисто «евклидовским» по своим установкам: кратко охарактеризованное на стр. 47 «типичное доказательство» по Евклиду является характерным также и для этой книги. «Евклидов» характер учебника [16] подчеркивался также включением в последние издания второй части этого учебника полного списка гильбертовских аксиом, возникших, как указывалось, в результате попытки строгого обоснования предложенной Евклидом системы изложения геометрии; впрочем, список этот, помещенный в дополнении в конце книги, никак «не работал» и потому производил довольно странное впечатление.

Гораздо более серьезную попытку полной реализации системы изложения геометрии по Евклиду—Гильберту представляет собой рассчитанный на учителей математики и студентов педагогических институтов «Курс элементарной геометрии» Д. И. Перепелкина [19]. Модифицировав несколько гильбертову систему аксиом за счет откровенного отказа от независимости аксиом, Перепелкин сумел построить строгий (дедуктивный)

курс геометрии, базирующийся на понятиях равенства (конгруэнтности) отрезков и углов. Впрочем, чрезвычайная громоздкость развиваемых Перепелкиным построений¹ (от которой его не спасал даже отказ от доказательства некоторого числа наиболее сложных теорем) делала эту книгу или какие-либо ее переделки невозможной для использования в качестве школьного учебника.

То же самое можно сказать и про близкий к книге [19] по своим основным установкам американский учебник геометрии [29], составленный авторитетной группой математиков и педагогов, возглавляющей так называемый «Болл-колледж проект» перестройки школьного математического образования в США. При всех своих несомненных методических достоинствах сложная книга [29] (несколько вызывающе открывающаяся портретами Евклида на титульном листе и Гильберта на фронтисписе) весьма выукло, как мне кажется, демонстрирует неприемлемость пропагандируемого ее авторами пути построения курса геометрии для средней школы!

Обратимся теперь к вопросу об использовании в средней школе идеи движения. В соответствии с огром-

¹ Выпишем, например, полностью «вторую группу» положенного в основу книги [29] списка аксиом («аксиомы порядка»). Эти аксиомы анализируют неопределяемое отношение «между», связывающее три точки A , B и C , которое записывается как ABC и читается так: B лежит между A и C .

2₁. Если ABC , то также CBA и A , B , C — три различные точки одной прямой;

2₂. Если A , B , C — три различные точки одной прямой, то имеет место одно и только одно из трех отношений ABC , ACB или BAC ;

2₃. Любые n точек одной прямой (где $n \geq 3$) можно обозначить через $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ так что $A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, \dots, A_{n-2}A_{n-1}A_n$;

2₄. Для любых двух точек A и B существует минимум одна точка C , такая, что ACB , и одна точка D , такая, что ABD ;

2₅. Каждая прямая t разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на две такие части, что если P и Q принадлежат к разным частям, то существует такая точка R прямой t , что PRQ , а если точки P и Q принадлежат к одной части, то такой точки прямой t не существует (замена аксиомы Паша!).

Разумеется, в книге [29] эти аксиомы сопровождаются чертежами и дополнительными пояснениями, но мне кажется, что уже выписанная часть общего списка аксиом (включающего также столь сложные предложения, как аксиома Архимеда или аксиома полноты) полностью компрометирует эту книгу как школьный учебник.

ным влиянием, оказанным «Энциклопедией» Дидро и Даламбера на французскую науку и культуру, установки Даламбера¹, впоследствии поддержанные еще авторитетом «Эрлангенской программы» Клейна, нашли первое отражение именно во Франции. Наибольшую роль здесь сыграл один из ведущих французских математиков XX в. Эмиль Борель, учебник [28] которого был некогда весьма популярен. Эта книга также является «антиевклидовой» по заложенным в ней идеям. Точку зрения ее автора лучше всего характеризует краткий ответ Бореля на один из вопросов анкеты, разосланной в 1905 г. ряду математиков и педагогов редакцией журнала «L'Enseignement mathématique»: «Чисто евклидовские методы уже расходятся с прогрессом современной математики: „Геометрия изучает группу движений”». В соответствии с этим Э. Борель в своей книге уделял большое внимание разным видам движений, например, симметриям разного типа; он также постулирует (т. е. принимает за аксиомы) некоторые свойства движения, вроде, указанного на стр. 42 описания «степени подвижности плоскости».

Книга [28] была переведена на ряд языков и имела значительное влияние на последующие учебники геометрии; ощущалось оно и в дореволюционных изданиях учебника [16] (но, к сожалению, не в последних его изданиях!). Возможно, что влиянием Бореля можно объяснить то большое место, которое уделяется движениям в (значительно более близком к евклидовским традициям) учебнике [1] другого выдающегося французского математика Жака Адамара. Из широко популярной в нашей стране книги Адамара внимание к геометрическим преобразованиям, в частности к движениям, перешло и в ряд русских учебников геометрии, в частности в книгу [19].

Значительно дальше Бореля пошел в своей интересной книге [35] рано умерший немецкий математик и педагог Герхард Томсен: его учебник проникнут идеями

¹ Укажем также, что Даламберу принадлежит важная теорема о классификации плоских («геометрических») движений (каждое собственное движение плоскости представляет собой поворот или параллельный перенос), неправильно называемая обычно теоремой Шаля по имени французского геометра XIX в., широко пропагандировавшего эту теорему.

«алгебраического исчисления симметрий», близкого к установкам школы Ф. Бахмана. Быть может от Томсена (пропагандировавшего свои идеи, в частности, в популярном среди английских педагогов журнале «The Mathematical Gazette»), связанные с «исчислением движений» теоретико-групповые идеи¹ перекечевали во многие из современных английских школьных учебников. Активно защищает их, например, один из ведущих деятелей протекающей сейчас в Англии реформы школьного математического образования Т. Флетчер, возглавляющий так называемый «Школьный математический проект» (School Mathematics Project, сокращенно SMP) перестройки школьного курса математики (его еще называют «Кембриджским школьным проектом», поскольку Флетчер и его группа работают в сотрудничестве с математиками Кембриджского университета). Заметим, наконец, что даже упоминавшаяся выше экстремистская система Бахмана вызвала попытки применения ее непосредственно в преподавании, чему посвящено, например, пособие [30] видного швейцарского педагога А. Дельсера или статья [34] немецкого педагога Е. Шнейдера (см. об этом вводную статью к книге [4]).

Обращаясь теперь к «метрическим» системам обоснования геометрии и к их месту в школьном преподавании, естественно, прежде всего проанализировать опыт США — страны, в которой, как отмечалось выше, активно проводились научные исследования по основаниям геометрии, исходящие из концепции расстояния. Заметим, что в американской средней школе в противоположность, скажем, Англии или Италии, Франции или России евклидовские традиции никогда не были особенно устойчивыми, что связано, быть может, с тем, что самостоятельные педагогические и научные установки сложились в США много позже, чем в развитых европейских странах.

Американская математика с гордостью называет своим прародителем знаменитого Джеймса Сильвестра (1814—1897), который многие годы был профессором старейшего университета США — университета имени Дж. Хопкинса в Балтиморе и основал первый на

¹ О них см. помещенную в настоящем сборнике статью Н. Я. Виленкина и автора этих строк.

Американском континенте научный математический журнал «American Journal of Mathematics». Между тем причиной переселения Сильвестра в США в значительной степени явилась резкая критика, которой он подвергал традиционный школьный курс геометрии «по Евклиду». Эта критика встретила сильное противодействие английской профессуры во главе с маститым Артуром Кэли, вследствие чего отношения Сильвестра с большинством английских математиков обострились до такой степени, что он счел уместным покинуть Англию.

Возможно, что заложенные Сильвестром традиции побудили Дж. Биркгофа столь активно включиться в дискуссии о путях построения школьного курса геометрии. Уже в 1933 г. — всего через год после появления упоминавшейся выше статьи Биркгофа «Система аксиом планиметрии...» — вышло в свет первое издание написанного Биркгофом совместно с методистом Ральфом Бейтли учебника «Основ геометрии» [27]. В последующие годы этот учебник, равно как и вышедшее отдельным изданием «Руководство» (Manual) для учителей, ведущих по нему преподавание, неоднократно переиздавался.

Книга [27] оказала большое влияние на все последующие попытки «метрического» построения школьного курса геометрии, поэтому о ней здесь уместно рассказать подробнее. Начинался учебник [27] с краткого введения: «Рассуждения; природа доказательств», за которым следовали две основные главы «Пять основных принципов» (т. е. аксиом) и «Семь основных теорем» (т. е. непосредственных выводов из принятых аксиом), на которых строился весь последующий курс геометрии, не имевший, впрочем, подчеркнуто дедуктивного характера. В число Основных Принципов (аксиом) авторы включали предложения о мерах отрезков и углов, подобные аксиомам D_1-D_3 и U_1-U_3 (стр. 52—53), но сформулированные более кратко. Завершалась книга [27] родственным введением (но теперь уже мотивированным с использованием всего изложенного ранее материала) заключением: «Рассуждения, абстрактная логическая система» и кратким приложением, содержащим перечень всех используемых в книге свойств (вещественных) чисел.

«Приложение» к книге [27] заслуживает того, чтобы

остановиться на нем более подробно. Легко понять, что связанное с использованием «метрических» аксиом D_1 — D_3 и U_1 — U_3 упрощение курса геометрии достигается не совсем даром. Основную роль здесь играет апелляция к (не доказываемым!) свойствам вещественных чисел, какими являются меры отрезков и углов, так что трудности здесь оказываются не столько исключенными, сколько перенесенными в другую область — в область учения о (вещественных) числах, относящегося к компетенции не геометрии, а (математического) анализа (ср. со сказанным на стр. 48). Однако в школьном преподавании все равно приходится считать свойства чисел известными, так что здесь такое построение геометрии оказывается явно более простым, чем традиционное. Но если стремиться к полноте дедукции, то приходится признать все используемые в рассуждениях свойства вещественных чисел дополнительными «аксиомами», положенными в основу курса геометрии наряду с аксиомами геометрического характера¹. Список этих дальнейших «аксиом» содержало «Приложение» к учебнику [27].

В последующие годы предложенная Дж. Д. Биркгофом система построения школьного курса геометрии приобрела в американской средней школе главенствующее положение; в определенном смысле реакцией на это положение и явился воинствующе «гильбертов» учебник [29]. Из придерживающихся «биркгофовского» направления учебников в первую очередь следует назвать интересную книгу видного американского математика Эдвина Моиза и педагога Флойда Даунса [18], переведенную ныне и на русский язык (а также учебник [32]). Укажем, наконец, что и в нашей учебной и методической литературе «метрические» системы обособления геометрии приобрели за последние годы значительную популярность. К установкам Дж. Биркгофа

¹ Наиболее откровенно декларируют это обстоятельство авторы тщательно составленного учебника [32], также придерживающиеся установок Дж. Д. Биркгофа. Список аксиом они начинают аксиомой 1: *справедливы все* (перечисленные в вводной главе книги) *основные свойства вещественных чисел и свойства, которые можно вывести из этих основных свойств*. В полном же списке аксиом, вынесенном в приложение к книге, они рассматривают аксиому и как (подробно выписанные) «аксиомы 1.1—1.62» (шестьдесят две аксиомы вещественного числа!).

очень близок учебник видного советского геометра А. В. Погорелова [21]. Иной вариант аксиометрического построения геометрии выбрал коллектив, возглавляемый А. Н. Колмогоровым (см. [17]), но и эти авторы исходят из чисто «метрических» идей, базируясь на понятиях *точки* и *расстояния* и беря за основу аксиомы P_1 — P_3 метрического пространства Фреше (см. стр. 50).

В заключение хочется отметить, что идущие от исследований М. Пиери, Д. Гильберта и В. Ф. Кагана пути обоснования (евклидовой) геометрии являются вовсе не единственно возможными. Так, например, от одной работы Пиери 1908 г. идет система обоснования геометрии, базирующаяся на понятиях «точка» и «равноудалена от»; эта система приобрела за последние годы известную популярность у специалистов по математической логике (ср. [5]). Совсем непохожа на охарактеризованные выше система аксиом, идущая от одного из виднейших математиков XX в. Г. Вейля [36] и также достаточная для полного построения всей геометрии. Этой системе обоснования геометрии посвящена следующая статья.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия, ч. 1-2. М., Учпедгиз, 1957-1958 (посл. издание).
2. Александров А. Д., Залгаллер В. А. Основы внутренней геометрии поверхностей. «Труды математического ин-та им. В. А. Стеклова», т. 63. М.-Л., Изд-во Академии наук СССР, 1962.
3. Арнольд И. В. Теоретическая арифметика. М., Учпедгиз, 1939.
4. Бахман Ф. Построение геометрии на основе понятия симметрии. М., «Наука», 1969.
5. Бет Е. В., Тарский А. Равносторонний треугольник — основное понятие геометрии в пространстве (реферат работы). — В сб.: «Математическое просвещение», вып. 6. М., Физматгиз, 1961, стр. 319—323.
6. Буземан Г. Геометрия геодезических. М., Физматгиз, 1962.

7. Буземан Г., Келли П. Проективная геометрия и проективные метрики. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
8. Бурбаки Н. Архитектура математики.— В сб.: «Математическое просвещение», вып. 5. М., Физматгиз, 1960, стр. 99—112. См. также Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М., Изд-во иностр. лит., 1963, стр. 244—259.
9. Гальперн С. А., Привалов И. И. Основы анализа бесконечно малых. М., Физматгиз, 1959 (посл. издание).
10. Гильберт Д. Основания геометрии. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
11. Делоне Б. Н. Элементарное доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского. М., Гостехиздат, 1956.
12. Дубнов Я. С. Измерение отрезков. М., Физматгиз, 1962.
13. Евклид. Начала Евклида, т. I—III, кн. 1—15. М.—Л., Гостехиздат, 1948—1950.
14. Каган В. Ф. Система посылок, определяющих евклидову геометрию. — «Записки Математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей», т. XX. Одесса, 1902, стр. 67—105. См. также Kagan B. Ein system von Postulaten welche die euklidische Geometrie definieren.—Jahreshericht deutsch. math. Vereinigung, 11, 1902, стр. 403—424.
15. Киселев А. П. Элементы алгебры и анализа, ч. 1-2. М.—Л., 1930-1931 (посл. изд.).
16. Киселев А. П. Геометрия, ч. I. Планиметрия. М., Учпедгиз, 1962; Геометрия, ч. 2. Стереометрия. М., «Просвещение», 1970.
17. Колмогоров А. Н. и др. Геометрия. 6-й класс. Пробный учебник. М., «Просвещение», 1970.
18. Моиз Э. Э., Даунс Ф. Л. Геометрия. М., «Просвещение», 1972.
19. Перепелкин Д. И. Курс элементарной геометрии, ч. 1-2. М.—Л., Гостехиздат, 1948—1949.
20. Перепелкина А. Н. Геометрия. — В кн.: А. Н. Перепелкина, С. И. Новоселов. Геометрия и тригонометрия. М.—Л., Учпедгиз, 1947.
21. Погорелов А. В. Элементарная геометрия, ч. 1. Планиметрия. М., «Наука», 1969; Элементарная геометрия, ч. 2. Стереометрия. М., «Наука», 1970.
22. Халмош П. Р. Николай Бурбаки. — В сб.: «Математическое просвещение», вып. 5, стр. 229—239.
23. Энрикес Ф. Начала геометрии. — «Новые идеи в математике», сб. 9. СПб, «Образование», 1914.
24. Яглом И. М. Геометрические преобразования, т. I-II. М., Гостехиздат, 1955-1956.

25. Яглом И. М., Атанасян Л. С. Геометрические преобразования. — «Энциклопедия элементарной математики», кн. IV. Геометрия. М., Физматгиз, 1963, стр. 50—159.

26. Яглом И. М., Ашкинзуе В. Г. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, ч. I. Аффинная геометрия. М., Учпедгиз, 1962.

27. Birkhoff G. D., Beutley R. Basic geometry. New York, 1933.

28. Borel E. Géométrie. Paris, 1905. См. также русский перевод переработанного немецкого издания той же книги: Борель Э. Элементарная математика, ч. 2. Геометрия. Одесса, 1922 (посл. издание).

29. Brumfiel Ch. F., Eicholz R. E., and Shanks M. E. Geometry. Riding, 1962.

30. Delessert A. Une construction de la géométrie élémentaire fondée sur la notion de reflexion. Genève, 1963.

31. Freudenthal H. Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. Nieuw Archiv Wiskunde, (4), 5, 1957, s. 105—142.

32. Genderson K. B., Pingry R. E., Robinson G. A. Modern Geometry, its structure and Function. New York, 1962.

33. Pieri M. Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Mem. Acad. Sci. Torino, (2), 49, 1899, p. 173—221.

34. Schneider E. Spiegelungsgeometrie auf der Oberstufe. Math. und Naturwiss. Unterricht, 16, 1964, s. 388—395 und s. 442—447.

35. Thomsen G. Grundlagen der Elementargeometrie in gruppentheoretischer Behandlung. Leipzig, 1933.

36. Weyl H. Raum, Zeit, Materie. Berlin, 1918.

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ,
член-корреспондент АПН СССР,
И. М. ЯГЛОМ,
доктор физико-математических наук

ВЕКТОРНОЕ ОБОСНОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ



§ 1. ВВЕДЕНИЕ

С привычным трудно расставаться. То, что выстрадано, на что затрачено много труда, жалко бросить — даже если холодный разум подсказывает, что это уже отжило и стало ненужным. Это относится не только к старой комнате, в которой прожиты многие годы и которую приходится оставить ради новой квартиры, и не только к милой привычной игрушке, с которой связаны теплые воспоминания детства. В полной мере это относится и к содержанию школьной программы по математике.

Представим себе, что в школе (где-то в начальных классах) нашлось место для геометрических задач на смекалку, задач, которые можно охарактеризовать, как своеобразную «геометрическую комбинаторику». Вот несколько примеров. Разбить фигуру, изображенную на рис. 1, на четыре равные части (изящное решение этой задачи показано на рис. 5). Или другая задача — ковер с отрезанными углами (рис. 2) требуется пере-

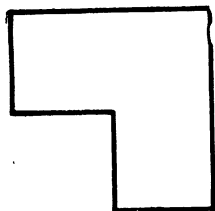


Рис. 1

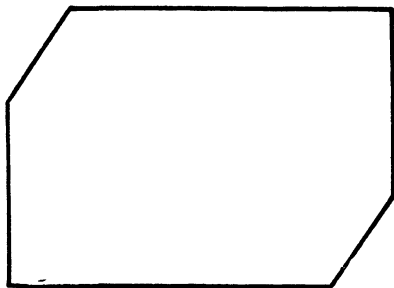


Рис. 2

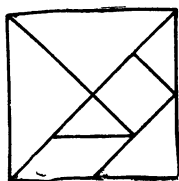
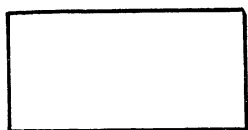
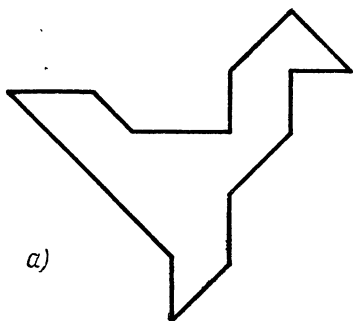
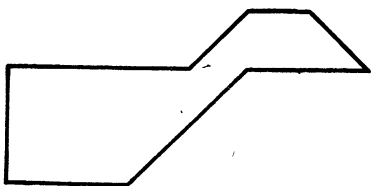


Рис. 3



б)



в)

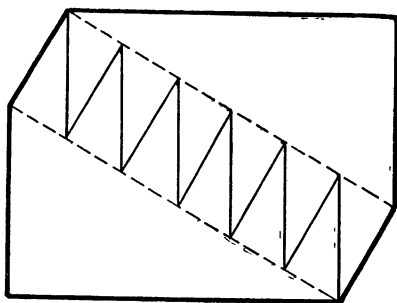
Рис. 4

кроить так, чтобы получился прямоугольный ковер. Одно из возможных решений (характерное тем, что требуется сделать только один — зигзагообразный — разрез) иллюстрирует рис. 6.

К тому же кругу относятся многочисленные задачи, связанные с головоломкой «стомахион». Разрезав квадрат, как показано на рис. 3, нужно составить из получающихся частей разные силуэты (рис. 4). Немало таких задач можно найти в превосходных книгах Я. И. Перельмана. И, конечно, это не только развлечение. Решение таких задач развивает геометрическое «видение», помогает развить трудное умение находить именно те **вспомогательные линии**, которые в данной задаче следует провести, **учит** мыслить нешаблонно и подлинно «геометрически». И если бы в школьной программе нашли место задачи такого рода, прижились в ней и стали бы привычными для учителя, то с этим материалом было бы впоследствии жалко расставаться.

Это лишь гипотетический пример (в действительности в школьной программе, к сожалению, никогда не было такой «геометрической комбинаторики»), но подобные примеры можно найти, анализируя реально действовавшие программы по математике. Обратимся к *геометрическим задачам на построение*. Когда-то в наших программах предусматривался значительный объем материала, связанного с решением этих задач. Оправдать внимание к задачам на построение довольно просто: среди них много очень изящных; одни из этих задач привлекают нас красотой анализа, другие — неожиданным использованием скрытых от первоначального взгляда вспомогательных линий, третьи — богатым исследованием с большим числом не сразу видных решений...

Задачи эти, бесспорно, развивают и логическое мышление, и геометрическую интуи-



а)

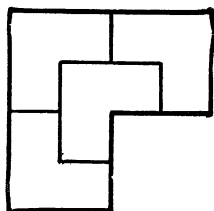
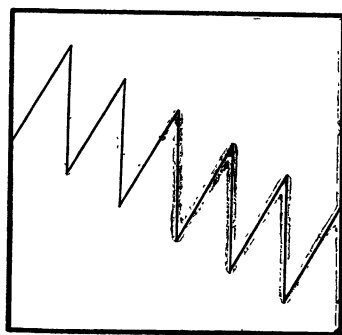


Рис. 5



б)

Рис. 6

цию, и многое другое. И тем не менее (и, безусловно, с большим сожалением особенно для тех, кому пришлось преподавать геометрию в годы, когда этим задачам уделялось много внимания в школьной программе) посвя-

щенные геометрическим построениям разделы программы сводятся к минимуму. По существу, оставлен лишь материал, связанный с геометрическим осмыслением самых основных построений, постоянно применяющихся в чертежной практике, да и то не в том виде, как это было раньше, так как к «классическому» набору циркуль—линейка добавлен еще чертежный треугольник...¹.

Нечто похожее происходит в школьном курсе геометрии и сейчас. Традиционные для этого курса методы доказательства теорем апеллировали к рассмотрению цепочек из пар равных или подобных между собой треугольников: так, для доказательства равенства симметричных относительно прямой l отрезков AB и $A'B'$ рассматривают сначала одну пару равных треугольников ($\triangle AOQ$ и $\triangle A'OQ$, рис. 7), а затем другую ($\triangle AOB$ и $\triangle A'OB'$). Иногда эта «цепочка» состоит не из двух пар треугольников, а ока-

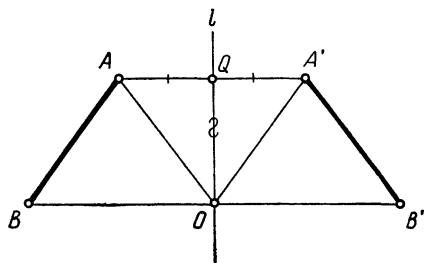


Рис. 7

зывается значительно более длинной. Такой метод доказательства приучает к строгости рассуждения, учит логически мыслить. Сейчас в связи с перестройкой школьной программы эти цепочки треугольников (составляющие как бы

строительные леса, с помощью которых возводилось в сознании учащегося здание геометрических знаний и умений) исключаются. При этом они исключаются не только как метод рассуждения, но и вместе с некоторыми теоремами (например, о пересечении высот треугольника в одной точке).

¹ Еще более выразительным примером здесь могут служить «чисто арифметические» (т. е. не использующие уравнений) методы решений смысловых задач, отказ от которых также вызвал немало огорчений.

метрии, чем обогащается новый курс взамен исключенных разделов. Это невозможно понять, не приняв во внимание тенденции развития современной математической науки. Значимость происходящей перестройки нельзя оценить, замкнувшись в рамках старой школьной элементарной геометрии, рассматривая ее изолированно от всего здания современной математики.

Богатство идей современной математики, идей, обеспечивающих ее победоносное (характерное для XX в.) внедрение в биологию и экономику, лингвистику и теорию музыки, искусство управления и царство игр, сегодня очень велико. Школьная геометрия сильно отстает от этого богатства идей, и назрела крайняя необходимость приблизить ее к этим идеям, сократить разрыв между школьным и научным пониманием математики.

Какие же идеи (с точки зрения современной математики) должны лечь в основу школьного курса геометрии, развивающего у школьников геометрическое мышление, являющееся составной частью научного мировоззрения воспитываемого сегодня человека будущего? Основными из этих идей нам кажутся следующие: 1) метрика; 2) геометрические преобразования; 3) аксиоматический метод; 4) векторные пространства.

Идея метрики состоит в том, что каждым двум точкам a, b пространства сопоставляется некоторое число $\rho(a, b)$, называемое *расстоянием* между этими точками. Среди многих свойств метрики первоначальными (и наиболее важными) с точки зрения современной математики являются те, которые составляют содержание «аксиом расстояния» $P_1—P_3$ (см. стр. 50, см. также книги [10] и [18] из приведенного в конце статьи списка литературы). Разумеется, речь идет вовсе не о том, чтобы изучать в школе теорию *метрических пространств* (о них см. стр. 49) — даже в самом минимальном ее объеме. Имеется в виду лишь первоначальное знакомство со свойствами расстояния и разъяснение той роли, которую играет расстояние в геометрии. Желательно также решение некоторого количества задач, связанных с применением только аксиом $P_1—P_3$, — это дает первоначальное представление о метрических пространствах и методах их исследования, а также позволит выработать навыки абстрактных, логических выводов, которые, в

частности, найдут свое применение впоследствии при изучении пределов и непрерывности.

О трех других группах идей, отмеченных выше, в частности о роли геометрических преобразований (ср. [19] и [21]) и аксиоматического метода в геометрии (см. [12], [13]), достаточно хорошо известно, хотя до сих пор эти идеи сколько-нибудь полного развития в школьном курсе геометрии не нашли.

Основной целью этой статьи является рассказ о четвертой группе идей, связанных с рассмотрением векторных пространств. Векторы уже начали пробивать себе дорогу в методическую литературу (см. [2]—[4] и [7]) прежде всего благодаря силе и изяществу векторного метода, проявляющихся при решении задач и доказательстве теорем. Приведем два простых примера.

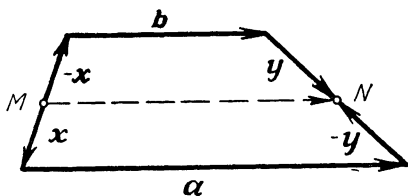


Рис. 8

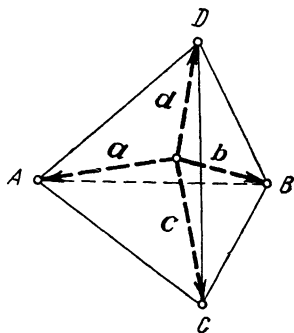


Рис. 9

Теорема о том, что *средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме*, тривиально доказывается, если ввести обозначения, показанные на рис. 8. Действительно,

$$\vec{MN} = \vec{x} + \vec{a} - \vec{y}, \quad \vec{NM} = -\vec{x} + \vec{b} + \vec{y},$$

откуда $2\vec{MN} = \vec{a} + \vec{b}$, или $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, что и дает (в силу параллельности и одинаковой направленности векторов \vec{a} и \vec{b}) требуемый результат.

Другой пример. Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ — векторы, идущие из центра правильного тетраэдра к его вершинам, то эти векторы имеют одну и ту же длину R и образуют между собой равные углы (рис. 9). Легко установить,

что $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$. Возводя это соотношение в квадрат и замечая, что $\mathbf{ab} = \mathbf{ac} = \mathbf{bc} = \dots = R^2 \cos \alpha$, находим:

$$4R^2 + 12R^2 \cos \alpha = 0,$$

откуда $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Таким образом, *угол между радиусами описанного вокруг правильного тетраэдра шара, идущими в вершины тетраэдра, равен $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ ($\approx 109^\circ 28'$)*.

Но векторы важны в геометрии не только как мощное средство решения задач и доказательства теорем. Они тесно связаны с метрикой — через скалярное произведение:

$$\rho(A, B) = AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(\vec{AB})^2}, \quad (1)$$

т. е. расстояние между двумя точками (в евклидовой геометрии) есть корень из скалярного квадрата вектора, соединяющего эти точки; аналогично угол φ между векторами \vec{AB} и \vec{AC} определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\sqrt{\vec{AB}^2} \cdot \sqrt{\vec{AC}^2}}. \quad (2)$$

Это позволяет широко использовать векторы при доказательстве «метрических» (т. е. связанных с расстояниями и углами) теорем школьного курса геометрии. Эта же связь векторов с метрикой устанавливает мостик между векторами и геометрическими преобразованиями. Связь между векторами и параллельными переносами хорошо известна. Но и любое движение тесно связано с векторами. Ведь движение — это геометрическое преобразование, сохраняющее метрику, т. е. преобразование, сохраняющее скалярное произведение векторов (см. [5], [6]). Таким образом, векторы как бы объединяют отмеченные выше важнейшие идеи геометрии.

Несколько менее известна связь векторов с аксиоматическим методом в геометрии и с обоснованием геометрии. Глубокой связи между этими вопросами и посвящена настоящая статья. Векторы как бы связывают в единый узел основные идеи, лежащие в основе современного понимания геометрии. Векторные пространства (о которых будет еще речь впереди) — это и есть, по существу, элементарная геометрия XX в.

§ 2. «ВЕКТОРНАЯ АКСИОМАТИКА» (ЕВКЛИДОВОЙ) ГЕОМЕТРИИ

Традиционный путь построения геометрии, идущий от Евклида и закрепленный Д. Гильбертом в его аксиоматике геометрии (1899), заключается в следующем. Основными, неопределяемыми понятиями геометрии служат понятия *точки, прямой, плоскости*. Основными, неопределяемыми отношениями между ними являются: отношения *принадлежности* (например, точка лежит на прямой, плоскость проходит через прямую и т. д.); понятие «*между*», являющееся отношением трех точек одной прямой и позволяющее определить отрезок, луч, угол и т. д.; отношение *равенства (конгруэнтности)*, связывающее два отрезка или два угла. Формулируются два десятка аксиом, связывающих между собой основные понятия и отношения (и, по существу, дающих косвенное определение этих основных понятий и отношений). Среди этих аксиом имеются такие хорошо известные, как «Через две различные точки проходит единственная прямая», «Из трех точек одной прямой лишь одна лежит между двумя другими», а также аксиома параллельности и некоторые другие. Все остальные понятия геометрии уже точно определяются, предложения геометрии (отличные от аксиом) строго доказываются (т. е. выводятся из аксиом в соответствии с правилами логики).

Этот путь построения евклидовой геометрии является самым известным, но отнюдь не единственно возможным (см. предыдущую статью сборника). Так, например, совершенно иной путь построения геометрии был предложен в 1917 г. знаменитым немецким математиком Г. Вейлем. В качестве основных неопределяемых понятий и отношений геометрии в аксиоматике Вейля принимаются: *вектор, точка, сумма векторов, произведение вектора на действительное число, скалярное произведение векторов и откладывание вектора от точки*. Прямые, плоскости, равенство фигур и т. п. определяются через эти первоначальные понятия и отношения.

Приведем список аксиом Вейля (в одном из вариантов).

I группа. Аксиомы сложения векторов
(групповые аксиомы)

Основное отношение: *каждым двум векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} однозначно сопоставляется третий вектор, называемый их суммой и обозначаемый через $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.*

I₁. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ для любых трех векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} .

I₂. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ для любых двух векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} .

I₃. Существует такой вектор $\mathbf{0}$, что $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ для любого вектора \mathbf{a} (вектор $\mathbf{0}$ называют нулевым вектором).

I₄. Для любого вектора \mathbf{a} найдется такой вектор \mathbf{a}' , что $\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{0}$ (вектор \mathbf{a}' называется вектором, противоположным вектору \mathbf{a} , и обозначается через $-\mathbf{a}$).

Аксиомы первой группы можно объединить следующей формулировкой: *векторы образуют коммутативную группу по сложению* (ср. стр. 131 настоящего сборника).

II группа. Аксиомы умножения вектора
на число (аксиомы линейного пространства)

Основное отношение: *каждому вектору \mathbf{a} и каждому числу k однозначно сопоставляется новый вектор, называемый произведением вектора \mathbf{a} на число k и обозначаемый через $k\mathbf{a}$.*

II₁. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ для любого вектора \mathbf{a} .

II₂. $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$ для любого вектора \mathbf{a} и любых (действительных) чисел k , l .

II₃. $(k+l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$ для любого вектора \mathbf{a} и любых (действительных) чисел k , l .

II₄. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ для любых векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и любого действительного числа k .

III группа. Аксиомы скалярного
произведения (метрические аксиомы)

Основное отношение: *каждым двум векторам \mathbf{a} , \mathbf{b} однозначно сопоставляется некоторое (действительное) число, называемое их скалярным произведением и обозначаемое через \mathbf{ab} .*

III₁. $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ для любых двух векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} .

III₂. $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$ для любых трех векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} .

III₃. $(ka)b = k(ab)$ для любых векторов a, b и любого действительного числа k .

III₄. $aa \geq 0$ для любого вектора a .

Число aa называется скалярным квадратом вектора a и обозначается также через a^2 ; (действительное) число $\sqrt{a^2}$ (его существование обеспечивается аксиомой III₄) называют длиной вектора a и обозначается также через $|a|$.

III₅. $a^2 = 0$ только, если $a = 0$.

IV группа. Аксиомы размерности

Определение: векторы a_1, a_2, \dots, a_m называются линейно зависимыми, если существуют такие числа k_1, k_2, \dots, k_m , из которых хотя бы одно отлично от нуля, что

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0.$$

Если векторы не являются линейно зависимыми, то они называются линейно независимыми.

IV₁. Существуют три линейно независимых вектора.

IV₂. Любые четыре вектора линейно зависимы.

V группа. Аксиомы откладывания вектора

Основное отношение: каждой паре точек A, B однозначно сопоставляется некоторый вектор, обозначаемый через \overrightarrow{AB} .

V₁. Для любой точки A и любого вектора a найдется такая единственная точка B , что $\overrightarrow{AB} = a$ (в этом случае говорят, что точка B получается в результате откладывания вектора a от точки A).

V₂. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ для любых трех (не обязательно различных) точек A, B, C .

Аксиомами этих пяти групп и исчерпываются аксиоматика геометрии по Вейлю.

Аксиома II₂ означает ассоциативность операции умножения вектора на число относительно числового множителя; аксиомы II₃ и II₄ означают дистрибутивность соответствующей операции относительно операций сложения чисел и сложения векторов. Аксиома III₁ утверждает коммутативность операции скалярного умножения векторов, а аксиома III₂ — ее дис-

трибутивность (относительно операции сложения векторов). Аксиома III_3 утверждает, что *скалярное умножение* векторов ассоциативно по отношению к операции умножения вектора на число. Аксиома III_4 утверждает неотрицательность скалярного квадрата; вместо этого говорят также о *неотрицательности скалярного произведения* (что, конечно, не означает, что скалярное произведение двух разных векторов не может быть отрицательным!), а аксиому III_5 формулируют в виде утверждения о положительной определенности скалярного произведения. Аксиомы IV_1 — IV_2 утверждают, что множество векторов трехмерно (или что пространство трехмерно — ср. ниже, стр. 87).

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ПО СХЕМЕ ВЕЙЛЯ

Наметим теперь вкратце основные этапы построения геометрии, исходя из аксиоматики Вейля.

1. Прежде всего следует сделать чисто алгебраические выводы из аксиом I, II и IV групп. Так, например, аксиома I_3 утверждает, что существует (хотя бы один) нулевой вектор, но там вовсе не утверждается, что такой вектор 0 единствен. То же относится к противоположному вектору (аксиома I_4). Оказывается, что исходя из аксиом можно *доказать*, что имеется лишь один нулевой вектор 0 и что для каждого вектора a имеется единственный противоположный ему вектор $-a$. Далее выводится, что уравнение $a+x=b$ всегда *однозначно разрешимо*, что позволяет ввести понятие разности векторов $x=b-a$. Более того, однозначно разрешимо и любое уравнение вида $a+kx=b$ (где $k \neq 0$). Из аксиом вытекает также, что с векторными равенствами можно обращаться так же, как с числовыми; в частности, слагаемые можно переносить из одной части равенства в другую, меняя стоящие перед ними знаки на противоположные, можно приводить подобные члены и т. п. Устанавливаются также равенства $0a=0$, $k0=0$ и $k(-a)=-(ka)=(-k)a$, справедливые для любого вектора a и любого (действительного) числа k . Завершается эта начальная глава курса геометрии доказательством того, что *любой вектор a может быть одно-*

значно разложен по любым трем линейно независимым векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, т. е. представлен в виде их линейной комбинации:

$$\mathbf{a} = k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 + k_3 \mathbf{e}_3; \quad (3)$$

числа k_1, k_2, k_3 (их часто обозначают буквами x, y, z) называют координатами вектора \mathbf{a} в «базисе» $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Для того чтобы пояснить, как «работают» аксиомы в этой главе курса, выведем формулу (3) из аксиом и ранее доказанных предложений (предполагая, что понятие суммы векторов уже распространено на случай более двух слагаемых и дистрибутивный закон Π_4 также распространен на случай более двух слагаемых).

Так как у нас имеются четыре вектора $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, то по аксиоме IV_2 они *линейно зависимы*, т. е. можно найти такие числа α, β, γ и δ , из которых хотя бы одно отлично от нуля, что

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{e}_1 + \gamma \mathbf{e}_2 + \delta \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Если бы было $\alpha = 0$, то мы имели бы $\alpha \mathbf{a} = 0 \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Но тогда написанное равенство приняло бы вид $\mathbf{0} + \beta \mathbf{e}_1 + \gamma \mathbf{e}_2 + \delta \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, или $\beta \mathbf{e}_1 + \gamma \mathbf{e}_2 + \delta \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, что противоречит линейной независимости векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (ибо поскольку $\alpha = 0$, то хотя бы одно из чисел β, γ, δ должно быть отлично от нуля).

Таким образом, $\alpha \neq 0$. Умножим обе части равенства (4) на число $\frac{1}{\alpha}$:

$$\frac{1}{\alpha} (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{e}_1 + \gamma \mathbf{e}_2 + \delta \mathbf{e}_3) = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathbf{0}. \quad (5)$$

Справа стоит нулевой вектор (ибо $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$ при всех k). В левой же части можно раскрыть скобки (ср. аксиому Π_4), и тогда получим

$$\frac{1}{\alpha} (\alpha \mathbf{a}) + \frac{1}{\alpha} (\beta \mathbf{e}_1) + \frac{1}{\alpha} (\gamma \mathbf{e}_2) + \frac{1}{\alpha} (\delta \mathbf{e}_3) = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Теперь на основании аксиом Π_2 и Π_1 имеем

$$\frac{1}{\alpha} (\alpha \mathbf{a}) = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \right) \mathbf{a} = 1 \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

и

$$\frac{1}{\alpha} (\beta \mathbf{e}_1) = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \beta \right) \mathbf{e}_1 = \frac{\beta}{\alpha} \mathbf{e}_1, \quad \frac{1}{\alpha} (\gamma \mathbf{e}_2) = \frac{\gamma}{\alpha} \mathbf{e}_2, \\ \frac{1}{\alpha} (\delta \mathbf{e}_3) = \frac{\delta}{\alpha} \mathbf{e}_3.$$

Таким образом, равенство (6) упрощается:

$$\mathbf{a} + \frac{\beta}{\alpha} \mathbf{e}_1 + \frac{\gamma}{\alpha} \mathbf{e}_2 + \frac{\delta}{\alpha} \mathbf{e}_3 = 0.$$

Переносим теперь последние три слагаемых в правую часть, имеем

$$\mathbf{a} = \left(-\frac{\beta}{\alpha} \mathbf{e}_1 \right) + \left(-\frac{\gamma}{\alpha} \mathbf{e}_2 \right) + \left(-\frac{\delta}{\alpha} \mathbf{e}_3 \right) + 0 = \\ = \left(-\frac{\beta}{\alpha} \mathbf{e}_1 \right) + \left(-\frac{\gamma}{\alpha} \mathbf{e}_2 \right) + \left(-\frac{\delta}{\alpha} \mathbf{e}_3 \right).$$

Воспользовавшись затем равенством $-(k\mathbf{b}) = (-k)\mathbf{b}$, получаем

$$\mathbf{a} = \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) \mathbf{e}_1 + \left(-\frac{\gamma}{\alpha} \right) \mathbf{e}_2 + \left(-\frac{\delta}{\alpha} \right) \mathbf{e}_3.$$

Обозначив числа $-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\gamma}{\alpha}, -\frac{\delta}{\alpha}$ через k_1, k_2, k_3 , получим равенство (3).

Далее нужно доказать единственность разложения (3), т. е. то, что если, кроме разложения (3), имеем $\mathbf{a} = k'_1 \mathbf{e}_1 + k'_2 \mathbf{e}_2 + k'_3 \mathbf{e}_3$, то непременно $k_1 = k'_1, k_2 = k'_2, k_3 = k'_3$. Это доказательство также несложно (оно базируется на том, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ по предположению, линейно независимы).

При школьном изложении геометрии по схеме Вейля описываемая алгебраическая часть должна быть сведена к минимуму. В частности, сокращение может быть достигнуто за счет использования избыточной системы аксиом: так, например, требование единственности нулевого вектора вполне может быть включено в условие аксиомы I_3 , а требование единственности противоположного вектора — в условие аксиомы I_4 ¹.

¹ Заметим, что, строго говоря, также и аксиома I_2 приведенного выше списка аксиом является излишней, поскольку она может быть выведена из остальных аксиом; однако в школьном преподавании это обстоятельство, бесспорно, следует игнорировать.

2. После изучения алгебры векторов можно определить понятия *прямой* и *плоскости*. Делается это следующим образом.

Определение 1. Пусть A и B — две различные точки. Прямой AB называется множество всех таких точек M , что векторы \overrightarrow{AM} и \overrightarrow{AB} линейно зависимы.

Теорема 1. Если P и Q — две различные точки прямой AB , то прямая PQ совпадает с прямой AB .

Эта теорема утверждает, что прямая определяется любыми двумя своими точками. Заметим еще, что из определения 1 непосредственно вытекает теперь, что через любые две различные точки проходит прямая и притом только одна.

Определение 2. Пусть A, B, C — три точки, не принадлежащие одной прямой. Плоскостью ABC называется множество всех таких точек M , что векторы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AM} линейно зависимы.

Теорема 2. Если P, Q, R — три точки плоскости ABC , не принадлежащие одной прямой, то плоскость PQR совпадает с плоскостью ABC .

Эта теорема утверждает, что плоскость определяется любыми тремя своими точками, не лежащими на одной прямой, т. е. что через каждые три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.

Теорема 3. Если две точки прямой l содержатся в плоскости α , то все точки прямой l принадлежат плоскости α . (В этом случае говорят, что прямая l лежит в плоскости α .)

Теорема 4. Если две плоскости имеют одну общую точку, то найдется еще одна общая точка этих плоскостей.

Теорема 5. Две произвольные плоскости либо совпадают, либо не имеют общих точек, либо, наконец, множество всех общих точек этих плоскостей представляет собой прямую.

Определение 3. Две плоскости называются параллельными, если они либо совпадают, либо не имеют общих точек.

Следует отметить, что в противоположность укоренившейся в школе традиции, мы здесь, подобно тому, как это сделано в книге [9] для прямых, предлагаем

считать две *совпадающие* плоскости частным случаем параллельных плоскостей. Это замечание ни в какой мере не относится только к вейлевской аксиоматике геометрии, а имеет общий методологический характер и позволяет в ряде случаев упростить формулировки теорем и устранить часто допускающиеся неточности. Так, сформулированная ниже теорема 6 (выражающая свойство транзитивности понятия параллельности, о чем еще будет идти речь) при принятом в школе понимании параллельности является неточной. Действительно, если плоскости α и β совпадают, а γ им параллельна, то $\alpha \parallel \gamma$ и $\beta \parallel \gamma$, но плоскости α и β не считаются параллельными (они не параллельны, а совпадают!). При таком понимании параллельности корректной была бы следующая формулировка: две плоскости, параллельные третьей, либо параллельны, либо совпадают. Подобные замечания можно сделать по поводу многих теорем школьного курса геометрии.

Но дело заключается не только в устранении неточностей или упрощении формулировок. Фундаментальную роль во всей математике играют отношения, связывающие два объекта того или иного рода (так называемые *бинарные отношения*). К ним, например, относятся: отношение *меньше*, связывающее два числа; отношение *подобия*, связывающее две фигуры; отношение *равносильности*, связывающее два уравнения, и т. д. При этом важнейшими типами бинарных отношений являются так называемые отношения эквивалентности и отношения порядка. *Бинарное отношение $\alpha \sim \beta$ называется отношением эквивалентности, если оно обладает следующими тремя свойствами* (верными для любых рассматриваемых объектов a, b, c):

- 1) *рефлексивностью: $a \sim a$;*
- 2) *симметричностью: если $a \sim b$, то $b \sim a$;*
- 3) *транзитивностью: если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$.*

Из числа изучаемых в школе бинарных отношений к отношениям эквивалентности принадлежат *равенство, подобие, равносильность уравнений* и многие другие. (Связывающее числа отношение «меньше» принадлежит к числу отношений порядка, о которых здесь подробно говорить не будем). Значение отношений эквивалентности состоит в том, что они позволяют разбить

все множество рассматриваемых объектов на классы эквивалентности: *любые два объекта, принадлежащие одному классу, эквивалентны между собой, в то время как объекты, взятые из разных классов, неэквивалентны*. Так, все плоские фигуры можно разбить на классы подобных фигур, все уравнения — на классы равносильных уравнений и т. д.

Понятие параллельности (прямых или плоскостей) при бытующем в школе определении отношением эквивалентности не является (оно не удовлетворяет условиям рефлексивности и транзитивности). Между тем достаточно условиться считать совпадающие прямые или плоскости параллельными, и получим понятие параллельности, обладающее всеми тремя свойствами, т. е. являющееся отношением эквивалентности. Классами эквивалентности при таком определении будут пучки параллельных плоскостей (или прямых); в случае прямых эти классы эквивалентности часто называют *направлениями* на плоскости или в пространстве. Понятие направления, понимаемое таким именно образом, входит в новую школьную программу по математике.

Итак, принятое выше определение 3 не только устраняет неточности и упрощает формулировки, но и соответствует современным научным воззрениям.

Теорема 6. *Две плоскости, параллельные третьей, параллельны между собой.*

Теорема 7. *Через каждую точку проходит единственная плоскость, параллельная данной плоскости.*

Далее вводятся понятие *параллельности прямой и плоскости* и понятие *параллельности двух прямых*, после чего доказываются обычные теоремы, относящиеся к этим понятиям.

3. Следующий этап построения геометрии по Вейлю связан с использованием III группы аксиом и раскрывает смысл понятия перпендикулярности.

Определение 4. *Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} называются перпендикулярными (или ортогональными) друг другу, если $\mathbf{ab} = 0$.*

Определение 5. *Две прямые называются перпендикулярными, если для любых двух точек A, B первой прямой и любых двух точек C, D второй прямой векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} перпендикулярны.*

Теорема 8. Если векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} (где $A \neq B$, $C \neq D$) перпендикулярны, то прямые AB и CD перпендикулярны.

Определение 6. Прямая и плоскость называются перпендикулярными, если для любых двух точек A, B прямой и любых двух точек C, D плоскости векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} перпендикулярны.

Теорема 9. Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Теорема 10. Если прямая перпендикулярна двум непараллельным прямым, принадлежащим некоторой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Теорема 10 известна под названием теоремы о двух перпендикулярах. Для примера приведем ее доказательство. При этом плоскость, фигурирующую в условии теоремы, обозначим через α , принадлежащие ей прямые — через l и m , а третью прямую, перпендикулярную l и m — через a .

Доказательство. Пусть A — точка пересечения (непараллельных!) прямых l и m ; B — отличная от A точка прямой l , а C — отличная от A точка прямой m . Так как точки A, B, C не лежат на одной прямой (иначе l и m совпадали бы, т. е. были бы параллельны), то согласно определению 2 и теореме 2 для любой точки $M \in \alpha$ векторы $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ линейно зависимы, откуда следует, что \overrightarrow{AM} можно разложить по векторам \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} :

$$\overrightarrow{AM} = k_1 \overrightarrow{AB} + k_2 \overrightarrow{AC}.$$

Если теперь D и E — две произвольные точки прямой a , то по условию теоремы ($a \perp l$, $a \perp m$) имеем $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, и потому

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{DE} \cdot (k_1 \overrightarrow{AB} + k_2 \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{DE} \cdot (k_1 \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{DE} \cdot (k_2 \overrightarrow{AC}) = \\ &= k_1 (\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB}) + k_2 (\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC}) = k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

(см. аксиомы III группы).

Итак, если M — произвольная точка плоскости α , то $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$. Если теперь N — любая другая точка плоскости α , то точно так же $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$. Но (см. аксиому V_2) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$; поэтому $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$ и, следовательно,

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 - 0 = 0,$$

т. е. $a \perp \alpha$.

Теорема 11. *Через каждую точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.*

Теорема 12. *Если прямая перпендикулярна плоскости, то она непараллельна ей и, следовательно, имеет с этой плоскостью единственную общую точку.*

Теоремы 11 и 12 обосновывают возможность осуществления ортогонального проектирования фигур и тел на плоскость.

Дальнейший путь построения пространственной геометрии совпадает (в отношении формулировок теорем) с общепринятым. В частности, формулируется теорема о трех перпендикулярах, вводится понятие угла между двумя плоскостями, угла между прямой и плоскостью и т. д. Следует лишь отметить, что в отношении углов первоначальным является понятие *угла между двумя векторами* \mathbf{b} , \mathbf{c} , который (при $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$) определяется формулой (2).

Читатель, несомненно, заметил, что в отношении основных определений и теорем это построение геометрии довольно мало отличается от традиционного. Доказательства же, напротив, как правило, совершенно отличны от традиционных. При этом если в традиционном построении геометрии доказательства основываются на довольно зыбких аксиомах (полный список которых школьникам не сообщается) и существенно апеллируют к наглядным представлениям, то здесь имеем последовательное дедуктивное построение геометрии. При решении задач учащиеся могут использовать как традиционные методы (со ссылками на строго доказанные теоремы), так и новые, векторные методы.

§ 4. ВАРИАНТЫ ВЕЙЛЕВСКОГО ПОСТРОЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

1. «Бесточечное» построение геометрии. В предыдущем параграфе было показано, что принадлежащая Г. Вейлю «векторная» аксиоматика геометрии исходит из двух основных (неопределяемых) понятий — *точки* и *вектора*, которые, однако, играют в этой аксиоматике далеко не равноправную роль. Понятие точки возникает лишь в последней (V) группе аксиом; также и все дальнейшее построение геометрии является в основном «векторным», привлекая понятие точки лишь в редких эпизодах (больше в определениях, чем в доказательствах теорем). При этом, естественно, возникает вопрос о том, нельзя ли вовсе отказаться от понятия точки, построив всю геометрию на «чисто векторной» основе.

Такое построение геометрии, в самом деле, возможно, причем оно мало отличается от построения, намеченного в § 2 и 3 этой статьи. Этот путь построения геометрии сводится к тому, что «точка» просто исключается из списка основных понятий, тем самым отбрасываются и аксиомы V группы; первые же четыре группы аксиом никак не меняются. Ясно, что основные определения 1 и 2 из § 3 теперь придется изменить: ведь раньше прямые и плоскости определялись как множества точек; сейчас же точек вовсе нет: понятие точки в новой схеме построения геометрии отсутствует, и поэтому прямые и плоскости теперь мы будем понимать как *множества векторов*, отождествив тем самым точки с векторами. Смысл этого отождествления является достаточно простым, ибо, как хорошо известно, выбрав (на плоскости или в пространстве) фиксированное «начало отсчета векторов» O , можно сопоставить каждой точке M ее «радиус-вектор» \vec{OM} , установив тем самым взаимно однозначное соответствие между множеством точек M и множеством векторов $\mathbf{a} = \vec{OM}$.

Таким образом, сущность намечаемого здесь подхода к векторному обоснованию геометрии состоит в замене «свободных векторов» «связанными векторами», приложенными к одной точке O , что позволяет говорить каждый раз не о множестве точек, а о множестве (свя-

занных!) векторов. При подобном построении геометрии можно, конечно, вовсе обойтись без термина «точка» (и в построениях геометрии в высшей школе зачастую поступают именно таким образом); однако в средней школе или педагогическом институте удобнее, учитывая укоренившуюся терминологию, разрешить пользоваться словом «точка», рассматривая его как синоним слова «вектор».

Разумеется, раздел 1 § 3 полностью сохраняет свое значение и при новом построении геометрии (ибо в этом разделе использовались лишь аксиомы групп I—IV); различие начинается лишь с первых определений раздела 2, видоизменяемых теперь так:

Определение 1'. Пусть \mathbf{a} и \mathbf{b} — два различных вектора; прямой $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ называется множество всех таких векторов \mathbf{m} , что векторы $\mathbf{a}-\mathbf{m}$ и $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ линейно зависимы.

Определение 2'. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — три вектора, не принадлежащих одной прямой (напоминаем, что прямая теперь — это множество векторов!); тогда плоскостью $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ называется множество всех таких векторов \mathbf{m} , что векторы $\mathbf{m}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}$ линейно зависимы.

Прямая и плоскость определяются соответственно двумя и тремя любыми своими векторами, т. е. справедливы следующие две теоремы.

Теорема 1'. Если \mathbf{p} и \mathbf{q} — два различных вектора прямой $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, то прямая $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ совпадает с прямой $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

Теорема 2'. Если \mathbf{p}, \mathbf{q} и \mathbf{r} — три различных вектора, принадлежащих плоскости $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ и не принадлежащих никакой прямой, то плоскость $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$ совпадает с плоскостью $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$.

Прямую и плоскость в «бесточечном» построении геометрии чаще описывают по-другому. Справедливы следующие теоремы, которые легко вывести из определений 1' и 2' и аксиом I и II групп:

Теорема А. Если \mathbf{a} и \mathbf{k} — два произвольных вектора, причем $\mathbf{k} \neq 0$, то множество всех векторов $\mathbf{a} + t\mathbf{k}$, где t — произвольное (действительное) число, представляет собой прямую.

Теорема Б. Если \mathbf{a}, \mathbf{k} и \mathbf{l} — три произвольных вектора, причем векторы \mathbf{k} и \mathbf{l} линейно независимы, то множество всех векторов $\mathbf{a} + u\mathbf{k} + v\mathbf{l}$, где u и v произ-

вольные (действительные) числа, представляет собой плоскость.

Можно также установить, что любая прямая и любая плоскость могут быть заданы так, как описано в теоремах А и Б, и эти описания можно принять за *определения* прямой и плоскости (а определения 1' и 2' станут тогда *теоремами*). Фигурирующий в теореме А вектор k обычно называют направляющим вектором прямой; при этом, скажем, параллельность двух прямых можно определить тем, что их направляющие векторы пропорциональны.

2. «Безвекторное» построение геометрии. Возможно и иное построение геометрии, в определенном смысле противоположное только что намеченному. Именно теперь за единственное неопределяемое понятие геометрии принимается *точка*. При этом опять приходится отбрасывать аксиомы V группы, связывающие векторы и точки; кроме того, здесь отбрасываются и аксиомы I группы, которые в этой схеме доказываются как теоремы. Вместо этого вводится новая группа аксиом I^* , описывающая основное (неопределяемое) отношение (A, B, C, D) , которое наглядно можно представить как *расположение четырех точек A, B, C, D в вершинах параллелограмма ABCD* (этот параллелограмм может быть и вырожденным).

Вот аксиомы этой группы:

I_1^* . Если $(ABCD)$, то $(ADCB)$.

I_2^* . Если $(ABCD)$, то $(CDAB)$.

I_3^* . Если $(ABCD)$ и $(CDEF)$, то $(ABFE)$ (рис. 10).

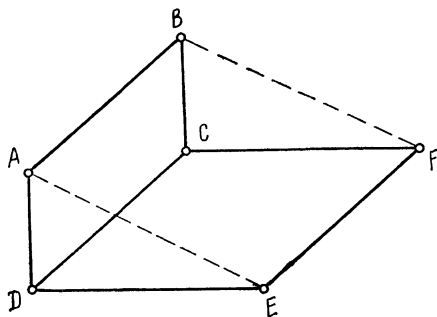


Рис. 10

I_4^* . Для любых трех точек A , B и C существует единственная точка D , такая, что $(ABCD)$.

Определение I. Упорядоченная пара точек A , B называется *направленным отрезком* и обозначается через \overline{AB} .

Определение II. Направленные отрезки \overline{AB} и \overline{DC} называются *эквивалентными*, если $(ABCD)$ (это отношение между направленными отрезками обозначается так: $\overline{AB} \sim \overline{DC}$).

Без труда устанавливается, что отношение эквивалентности обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности: ведь аксиомы I_2^* и I_3^* , по существу, утверждают симметричность и транзитивность этого отношения, а его рефлексивность вытекает из симметричности и транзитивности. Таким образом, отношение эквивалентности относится к категории отношений эквивалентности и, значит, множество всех направленных отрезков можно разбить на классы эквивалентных между собой.

Определение III. Классы эквивалентных между собой направленных отрезков называются *векторами*.

Теперь можно включить в число основных (неопределяемых отношений между точками операции умножения векторов на число и скалярного умножения векторов, связывающие векторы и числа. Что касается операций сложения векторов и откладывания вектора от точки, то они определяются так:

Определение IV. Пусть \mathbf{a} и \mathbf{b} — два вектора, $\overline{MN} \in \mathbf{a}$ и $\overline{PQ} \in \mathbf{b}$ (рис. 11). Выберем на плоскости произвольную точку O и найдем такие точки A , B и C , что $(OANM)$ (т. е. $(NMOA)$; см. аксиомы I_2^* и I_4^*), $(OBQP)$ и $(AOBC)$. Тогда вектор $\mathbf{c} \ni \overline{OC}$ называется *суммой* векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} и обозначается через $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Определение V. Пусть A — произвольная точка и \mathbf{a} — произвольный вектор; пусть еще $\overline{MN} \in \mathbf{a}$. Точка B , удовлетворяющая условию $(NMAV)$ (рис. 12), называется *полученной откладыванием вектора \mathbf{a} от точки A* .

Легко установить, что эти определения корректны, т. е. что вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и точка B не зависят от «случайных элементов построения» — от выбора «представите-

лей» \overrightarrow{MN} и \overrightarrow{PQ} векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} и точки O . Все аксиомы групп I и V могут быть теперь доказаны; что же касается аксиом групп II—IV, то они при этой схеме построения геометрии не отличаются от приведенных в § 2.

Какое место могут занять намеченные два пути построения геометрии в школьном преподавании? Первый из них в силу своей оторванности от всех привычных учащемуся представлений кажется нам совершенно не-

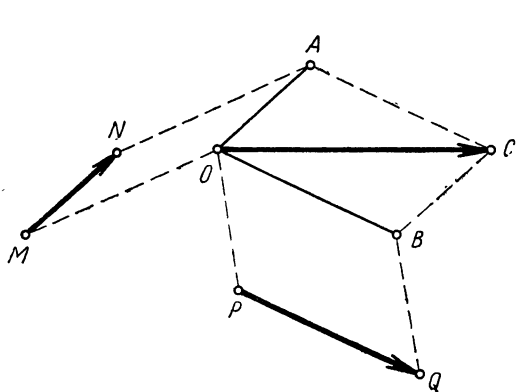


Рис. 11

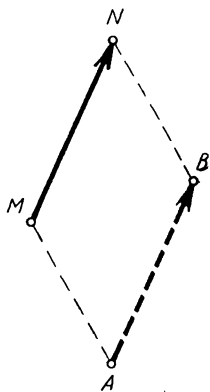


Рис. 12

приемлемым для средней школы, хотя в курсах высшей школы он используется весьма широко. Второй путь представляет собой некоторую «адаптацию» схемы Вейля; его можно сопоставить с системой, предложенной в известной русскому читателю книге Г. Шоке [17]. Нам, однако, кажется, что в чисто педагогическом отношении этот путь уступает тому, который был намечен в § 2 и 3.

§ 5. АКСИОМАТИКА ВЕЙЛЯ И НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

Напомним, что основным достоинством гильбертовой схемы построения геометрии, обеспечившим ее победу над другими близкими по времени вариантами аксиоматики евклидова пространства, явилось научно обоснованное членение всей системы аксиом на отдельные группы, каждая из которых характеризует ту

или иную категорию свойств пространства (аксиомы принадлежности, аксиомы порядка, аксиомы параллельности и др.). Не только вся аксиоматика в целом, но и несколько отдельных групп аксиом определяют достаточно содержательную геометрию. Так, исключив из системы аксиом Гильберта аксиомы конгруэнтности (равенства), мы получаем аксиоматику свободного от метрики *аффинного пространства*. Исключив аксиому параллельности, мы приходим к *абсолютной геометрии*, введенной Я. Бойаи, а, заменив эту аксиому ее отрицанием, приходим к аксиоматике *неевклидовой геометрии Лобачевского*. Тесно связана аксиоматика Гильберта также с различными *неархимедовыми геометриями* (в которых не существует единого процесса измерения отрезков) и т. д.

Система аксиом Вейля обладает аналогичными достоинствами. I, II и IV группы его аксиом определяют понятие (трехмерного) *векторного пространства*; при этом замена в аксиомах IV₁ и IV₂ чисел 3 и 4 соответственно на 2 и 3 приводит нас к *двумерному векторному пространству* (векторной плоскости), а замена тех чисел на n и $n+1$, где n — произвольное натуральное число, — к так называемому *n -мерному векторному пространству* (последнее понятие играет сегодня особо важную роль). Векторные пространства имеют первостепенное значение для самой математики и для большинства ее приложений: они используются в алгебре и геометрии, в (математическом) анализе и теории вероятностей, в теоретической физике и биологии, в экономике и лингвистике. Вообще в настоящее время трудно указать такую область науки, которая при математическом описании рассматриваемых явлений не использовала бы векторное пространство.

Полный отказ в аксиоматике векторного пространства от аксиом IV группы, т. е. ограничение аксиомами групп I и II, дает нам *безразмерное векторное пространство*, нередко встречающееся в научных исследованиях; аксиоматика безразмерного пространства, подобно, скажем, аксиоматике абсолютной геометрии Я. Бойаи, не обладает свойством полноты. Предположение о наличии в (векторном) пространстве любого числа линейно независимых векторов задает *бесконечномерное векторное пространство* (частным случаем которого является

счетномерное векторное пространство). Бесконечномерные векторные пространства (особенно гильбертово пространство, о котором будет сказано ниже) играют фундаментальную роль в современном анализе и теоретической физике.

Далее аксиомы I, II, IV, V групп определяют лишнее метрики *аффинное пространство*, которое тоже может быть двумерным (плоскость), трехмерным, n -мерным или даже бесконечномерным. Так же и описываемое всеми пятью группами аксиом *евклидово пространство* может иметь любую размерность; счетномерное евклидово пространство и называется *гильбертовым*. (Относительно n -мерного евклидова пространства см. [1], [5], [6], [14].) Аксиомы I, II, III, IV групп определяют *евклидово векторное пространство*, которое, однако, весьма существенно отличается от обычного (точечно-векторного!) евклидова пространства (см. раздел 1, § 4); аналогично этому и векторное пространство довольно существенно отличается от аффинного.

Ограничимся теперь случаем двумерного пространства (плоскости). Если отказаться от аксиомы III₅ и заменить аксиому III₄ утверждением о существовании таких (ненулевых!) векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , что $\mathbf{a}^2 > 0$, $\mathbf{b}^2 < 0$, то придем к понятию *псевдоевклидова пространства Минковского*, являющемуся математическим фундаментом (специальной) теории относительности Эйнштейна. Сохранение же аксиомы III₄ и замена аксиомы III₅ утверждением о существовании таких ненулевых векторов \mathbf{a} и \mathbf{c} , что $\mathbf{a}^2 > 0$, $\mathbf{c}^2 = 0$ приводит к так называемой *полуевклидовой геометрии*, также связанной с классической механикой Галилея и Ньютона, как связана псевдоевклидова геометрия с (релятивистской) механикой Эйнштейна (ср. [15] или [20]).

Аналогично определяются и многомерные псевдоевклидово и полуевклидово пространства, в частности четырехмерные пространства, наиболее точно описывающие свойства окружающего нас пространства-времени. Наконец, простое переименование объектов трехмерного векторного пространства, а именно условие о том, что точками называются его *одномерные подпространства* (прямые), а прямыми — *двумерные подпространства* (плоскости), приводит нас к плоской *проективной геометрии* (см., например, [8]), а такое же

переименование, примененное к трехмерному евклидову, а также псевдоевклидову пространству, — соответственно к плоским *неевклидовым геометриям Римана и Лобачевского* (см. [15] или [20]). (Аналогично можно получить пространственную проективную и неевклидову геометрии исходя из четырехмерных геометрий, определяемых по схеме Вейля, а n -мерные геометрии — из $(n+1)$ -мерных геометрий.) Этот ряд модификаций схемы Вейля, приводящих к содержательным геометрическим конструкциям, может быть еще продолжен.

Таким образом, по богатству заключенных в ней идей аксиоматика Вейля намного превосходит аксиоматику Гильберта. Более того, если аксиоматика Гильберта, по существу, обращена в прошлое геометрии, проливая яркий свет на отдельные этапы исторической эволюции учения о пространстве и возникавшие в прошлом затруднения (неевклидова геометрия Лобачевского, неархимедова геометрия Веронезе, геометрия порядка Паша и т. д.), то пафос аксиоматики Вейля состоит в ее устремленности в будущее, в ее теснейшей связи с наиболее актуальными и развивающимися разделами современной науки.

§ 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

«Векторная» аксиоматика геометрии впервые была изложена в знаменитом учебнике (общей теории относительности [25], излагающем содержание лекций, которые Герман Вейль читал в 1917 г. учащимся Высшей технической школы в Цюрихе (где в эти годы работал и сам Эйнштейн). Вейль рассматривал векторный подход к геометрии как удачный методический прием, позволяющий параллельно излагать сведения, относящиеся как к евклидову, так и к псевдоевклидову пространству. Ясность и простота предложенной Вейлем аксиоматики и возможность модификации ее, с тем чтобы охватить новые типы пространств (см. об этом § 5), сделали схему Вейля чуть ли не основной в преподавании геометрии в высшей школе; она излагается, например, в рассчитанных на студентов вузов книгах [1], [5], [6], [16].

Первым защитником идеи использования векторной аксиоматики геометрии в средней школе явился как

будто известный французский математик и педагог Густав Шоке. В уже упоминавшейся выше книге [17] (в оригинале эта книга называется «Преподавание геометрии» и обращена к учителям средней школы) Г. Шоке называет векторную аксиоматику «царским путем» в геометрию¹. Усилия Шоке были направлены на то, чтобы, видоизменив слегка схему Вейля, сделать ее более близкой к традиционной системе изложения, облегчив восприятие этой книги учителями средних школ² — в этой связи мы сравнивали книгу [17] с изложенной в разделе 2 § 5 системой построения геометрии, игнорирующей (непривычное учителям и учащимся) понятие вектора.

Однако и этот путь отвергает один из авторитетнейших французских математиков Жан Дьедонне, автор вышедшей в свет почти одновременно с «Геометрией» Шоке книги «Линейная алгебра и элементарная геометрия» [22]. Дьедонне критикует Шоке за стремление как-то приблизить аксиоматику Вейля к средней школе, призывая не «спускать» эту систему изложения геометрии до уровня математической культуры учителей средних школ, а напротив, поднимать уровень учительства до понимания векторной системы обоснования геометрии. Вся темпераментно написанная книга Дьедонне посвящена отстаиванию следующей методической идеи: *линейная алгебра — это и есть элементарная (т. е. школьная) геометрия*; никакой другой геометрии в школе быть не должно!

Книга [22], как и книга [17], рассчитана на учителей средних школ; однако сегодня имеются уже и изложения геометрии в духе Вейля—Дьедонне, рассчитанные на учащихся. Так, например, горячим пропагандистом векторного пути обоснования геометрии является известный бельгийский педагог и математик Жорж Папи; этому был посвящен, в частности, его получасовой доклад [11], прочитанный на секции препо-

¹ Это выражение связано со следующим историческим анекдотом: по преданию, когда властитель Египта Птолемей обратился к Евклиду с просьбой скорейшим путем обучить его геометрии, учитывая занятость Птолемея делами управления государством, Евклид ответил: «В геометрию нет царского пути».

² Учащиеся в любом варианте изучают в каждом классе новый для себя материал; поэтому резкое изменение традиционно сложившейся системы преподавания наибольшее противодействие встречает обычно не у школьников, а у их учителей (и родителей)

давания математики происходившего в 1966 г. в Москве Международного математического конгресса. С 1963 г. началась публикация многотомного курса «Современной математики» Ж. Папи [23], представляющего собой учебник для средних и старших классов бельгийских школ; пока опубликованы 1-й, 2-й, 5-й, 6-й и 3-й тома этого учебника (перечисляются в порядке выхода в свет).

При этом, если в 1-м томе своей книги Папи принял довольно своеобразную систему изложения геометрии, базирующуюся на теоретико-множественных концепциях, то в дальнейшем откровенно пошел по «векторному» пути. Том 2 его книги (442 стр.) целиком посвящен построению «векторной плоскости» (двумерного векторного пространства); он так и называется «Вещественные числа и векторная плоскость». На этой базе в т. 3 («Вот Евклид», 452 стр.) и т. 6 («Планиметрия», 277 стр. — этот том посвящен Жану Дьедонне) строится развитая система геометрии на плоскости, пожалуй, даже слишком богатая несущественными деталями. Близка к этому и система изложения геометрии, принятая в менее «вызывающе модернистских» учебниках [24] коллектива бельгийских преподавателей, возглавляемого известным педагогом Вили Серве.

В русской литературе имеются пока лишь «умеренно векторные» учебники [7] и [2]. Бесспорно, однако, что и в нашей стране следует провести педагогический эксперимент, который позволил бы судить о приемлемости для средней школы «царского пути» Г. Шоке — «чисто векторного» пути обоснования геометрии: ведь решение вопроса о путях перестройки курса геометрии в старших классах средней школы откладывать больше нельзя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М., «Наука», 1968.
2. Барыбин К. С. Геометрия. Пробный учебник. 9-й класс. М., «Просвещение», 1970.
3. Болтянский В. Г. и Яглом И. М. Векторы в курсе геометрии средней школы. М., Учпедгиз, 1962.
4. Болтянский В. Г. и Яглом И. М. Преобразования Векторы. М., «Просвещение», 1964.

5. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М., «Наука», 1971.
6. Ефимов Н. В. и Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., «Наука», 1970.
7. Клопский В. М., Скопец З. А., Ягодский М. И. Геометрия. 9-й класс и 10-й класс. Пробные учебники. М., «Просвещение», 1967 и 1971.
8. Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. М., «Наука», 1966.
9. Колмогоров А. Н., Семенович А. Ф., Нагибин Ф. Ф., Черкасов Р. С. Геометрия. 6-й класс. Пробный учебник. М., «Просвещение», 1970.
10. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1968.
11. Папи Ж. Геометрия в современном преподавании математики. «Математика в школе», 1967, № 1, стр. 39—42.
12. Рашевский П. К. Геометрия и ее аксиоматика. — В сб.: «Математическое просвещение». Вып. 5. М., Физматгиз, 1960, стр. 73—98.
13. Розенфельд Б. А. Аксиомы и основные понятия геометрии. — В кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. IV. М., Физматгиз, 1963, стр. 9—48.
14. Розенфельд Б. А. и Яглом И. М. Многомерные пространства. — В кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. V. Геометрия. М., «Наука», 1966, стр. 349—392.
15. Розенфельд Б. А. и Яглом И. М. Неевклидовы геометрии. — В кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. V, стр. 393—475.
16. Шилов Г. Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М., «Наука», 1969.
17. Шоке Г. Геометрия. М., «Мир», 1970.
18. Шрейдер Ю. А. Что такое расстояние? М., Физматгиз, 1963.
19. Яглом И. М. Геометрические преобразования, тт. I—II. М., Гостехиздат, 1955—1956.
20. Яглом И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М., «Наука», 1969.
21. Яглом И. М. и Атанасян Л. С. Геометрические преобразования. — В кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. IV, стр. 50—158.
22. Dieudonné J. *Algebre linéaire et géométrie élémentaire*, Paris, 1964. (Русский перевод книги готовится к изданию изд-вом «Наука»).
23. Pary G. *Mathématique moderne*, тт. 1—3, 5, 6. Bruxelles. 1965—1968.
24. Servais W., Clersy C., Biefnot M. *Mathématique 1*, Paris—Bruxelles, 1969. Servais W., Clersy C., Keymenlen T., van Bost T. *Mathématique 2*, Paris—Bruxelles, 1971.
25. Weyl H. *Raum, Zeit, Materie*. Berlin, 1918.

Н. Х. РОЗОВ,
кандидат физико-математических наук

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ



Понятие функции, являющееся одним из центральных понятий математики, проходит в том или ином виде через весь школьный курс, поэтому формирование у учащихся правильного представления о функциональной зависимости — задача исключительно важная.

Протекающий сейчас процесс математизации знаний, применения математических методов и вычислительных машин в самых различных сферах человеческой деятельности предъявляет новые, повышенные требования к математической подготовке выпускников средних школ. Это нашло свое отражение и в новых программах школьного курса математики.

В частности, в этих программах увеличен удельный вес понятия функции, отводится много часов как рассмотрению конкретных функциональных зависимостей, так и изучению общих свойств функций и методов их исследования (включая и те методы, которые раньше всегда составляли прерогативу высшей математики)¹.

В одной статье, конечно, невозможно охватить все вопросы, касающиеся понятия функции. Поэтому поставимся выяснить лишь некоторые аспекты, которые представляются наиболее существенными, но не находят подчас удовлетворительного освещения в методической литературе и в школьной практике.

1. Ответ на основной вопрос — «что такое функция?» — в школе дается в виде определения вроде следующих:

¹ Этих методам посвящены первые две статьи настоящего сборника.

«Переменная величина y называется функцией от переменной величины x , если каждому возможному значению x соответствует одно, вполне определенное значение y . При этом совершенно неважно, каким именно способом установлено указанное соответствие; важен лишь сам факт соответствия» (см. [9], § 30);

«Если каждому значению одной переменной величины x каким-либо образом поставлено в соответствие вполне определенное значение другой величины y , то говорят, что задана функция. Величину y при этом называют зависимой переменной величиной, или функцией, а величину x — независимой переменной величиной, или аргументом» (см. [8], § 201).

На первый взгляд эти (и подобные им) формулировки кажутся вполне понятными. Но если обдумать их, попытаться строго и формально разобрать их смысл, то возникает ряд вопросов. Прежде всего неясно, что же такое функция — переменная величина y (т. е. является ли термин «функция» синонимом «зависимой переменной»), тот способ, которым установлено соответствие значений величин x и y , или же «сам факт соответствия». Далее во всех этих формулировках слово «функция», по существу, заменяется другими словами, для которых столь же правомерно требовать определения (в самом деле, что такое «переменная величина», «значение переменной величины», «соответствие?»).

Эти вопросы показывают, что традиционный способ определения функции, использующий «переменные величины», обладает определенными недостатками. Достаточно строгая, соответствующая воззрениям современной математики и в то же время вполне доступная пониманию учащихся трактовка понятия «функция» получается, если встать на теоретико-множественную точку зрения (кстати, все шире проникающую в школьную практику).

Для этого привлечем понятие отображения одного множества в другое. Но с самого начала подчеркнем, что это понятие будет считаться *первичным*, не подлежащим формально-строгому определению (так же, как и понятия числа, точки, множества и некоторые другие). Опишем лишь, объясним содержание этого понятия, привлекая другие слова (которые кажутся нам более естественными, наглядными с точки зрения нашего прак-

тического опыта и здравого смысла), разъясим и проиллюстрируем его на многочисленных и разнообразных примерах.

Перейдем к описанию и разъяснению понятия отображения одного множества в другое. Интуитивно смысл слова «отображение» хорошо знаком каждому; оно отражает факт наличия некоторого *соответствия* между элементами двух множеств. Более точно, пусть: 1) *задано (непустое) множество M* ; 2) *задано (непустое) множество N* ; 3) *для каждого элемента множества M указан один вполне определенный элемент множества N* . В таком случае будем говорить об *отображении множества M в множество N* .

Следовательно, задать отображение — это значит описать: 1) множество, которое отображается (оно называется *областью определения* отображения); 2) множество, в которое отображается область определения (оно называется *областью значений* отображения), 3) *соответствие* между этими множествами, при котором каждому элементу области определения соответствует ровно один элемент области значений. Иначе говоря, понятие «отображения» включает в себя неразделимое описание двух множеств M и N и описание правила (способа, закона), по которому для каждого элемента x множества M задается определенный элемент y множества N , в который элемент x отображается.

Закон (правило) соответствия, по которому для каждого элемента области определения M отображения задается ровно один элемент области значений N , обозначим для краткости буквой f . Тогда отображение множества M в множество N можно записать так (это обозначение принято в современной математике):

$$M \xrightarrow{f} N \text{ или } f: M \rightarrow N. \quad (1)$$

Элемент $y \in N$, в который при данном отображении (1) отображается элемент $x \in M$, называется *образом* элемента x (или, иначе, *значением* отображения на элементе x); элемент x называется в этом случае *прообразом* элемента y . Если условиться образ элемента $x \in M$ при отображении (1) обозначать символом $f(x)$ (имея в виду, что элемент $f(x) \in N$ в силу правила f соответ-

ствуем элементу $x \in M$), то само отображение (1) можно записать еще и так:

$$f(x), x \in M.$$

Часто употребляют более наглядную запись, отражающую тот факт, что каждый элемент $x \in M$ отображается в свой образ — в элемент $f(x)$ ¹:

$$x \rightarrow f(x), x \in M. \quad (2)$$

2. Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих некоторые моменты, связанные с понятием отображения.

Пример 1. Пусть $Ч$ — множество выпуклых четырехугольников на плоскости, а T — множество точек этой плоскости. Установим между элементами этих множеств такое соответствие: выпуклому четырехугольнику соответствует точка пересечения его диагоналей; этот закон соответствия (обозначим его d) для *каждого* выпуклого четырехугольника (элемента множества $Ч$) задает *одну вполне определенную* точку (элемент множества T). Таким образом, мы можем говорить об отображении множества выпуклых четырехугольников на множество точек: $Ч \xrightarrow{d} T$. Если выпуклый четырехугольник обозначить буквой $ч$, а точку пересечения его диагоналей обозначить $d(ч)$, то это отображение можно записать в виде $ч \rightarrow d(ч)$, $ч \in Ч$.

Обратим внимание, что при этом отображении *каждый* элемент множества T является образом *бесконечного числа* элементов множества $Ч$: взяв любую точку плоскости, можно указать бесконечно много четырехугольников, для которых эта точка есть точка пересечения диагоналей. Однако этот факт не мешает нам говорить об отображении $d: Ч \rightarrow T$. Вообще в случае

¹ Отметим, что фигурирующие в (1) и (2) стрелки имеют не один и тот же смысл. Запись $f: M \rightarrow N$ подразумевает «слитное» отображение множества M в N , а в записи $x \rightarrow f(x)$ речь идет об отображении каждого конкретного элемента x в элемент $f(x)$. Именно поэтому (2) часто записывается иначе: $x \mapsto f(x)$, $x \in M$. Различие между символами \rightarrow и \mapsto можно сравнить с различием между символами \subset (запись $B \subset A$ означает, что множество B целиком принадлежит множеству A) и \in (запись $x \in A$ означает, что x есть элемент множества A или что x является «одноэлементным подмножеством» множества A).

Заметим также, что запись $x \xrightarrow{f} y$ является нелепой, ибо сам закон f полностью фиксируется указанием для каждого элемента x соответствующего ему элемента y .

произвольного отображения (1) элемент $y \in N$ может иметь *сколько угодно* прообразов.

Пример 2. Между элементами тех же множеств установим соответствие по другому правилу s : выпуклому четырехугольнику соответствует точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон. Легко убедиться, что можно снова говорить об отображении множества выпуклых четырехугольников на множество точек: $\mathcal{C} \rightarrow T$.

Отметим, что отображения в примерах 1 и 2 — *разные*: у них одинаковы область определения и область значений, но правила установления соответствия не совпадают между собой.

Пример 3. Если выпуклому четырехугольнику поставить в соответствие центр окружности, не пересекающейся со сторонами этого четырехугольника, то отображения множества \mathcal{C} в множество T не получится. Ведь в рассматриваемом случае каждому четырехугольнику может быть с равным правом соотнесена *любая* точка плоскости.

Об отображении (1) говорят лишь при условии, что для *каждого* элемента множества M задан *один и только один* соответствующий элемент области значений N . Другими словами, образ $f(x)$ элемента $x \in M$ при отображении (2) определяется *однозначным образом*.

Пример 4. Если выпуклому четырехугольнику поставить в соответствие центр окружности, вписанной в этот четырехугольник, то отображения множества \mathcal{C} в множество T тоже не получится, так как в рассматриваемом случае можно указать соответствующую точку *не для каждого* выпуклого четырехугольника.

Об отображении (1) говорят лишь при условии, что соответствующий элемент множества N указан для *каждого* элемента области определения M (и только для элементов этого множества). Другими словами, в области определения M *не может быть* элемента, не имеющего образа.

Пример 5. Множества \mathcal{C} и T те же, что в примере 1. Фиксируем в плоскости некоторую точку A и каждому выпуклому четырехугольнику поставим в соответствие одну и ту же точку A (правило соответствия a). Тогда, очевидно, будет определено отображение множе-

ства выпуклых четырехугольников в множество точек плоскости: $\mathcal{C} \xrightarrow{a} T$.

Обратим внимание, что (в отличие от отображения $d: \mathcal{C} \rightarrow T$ примера 1) при отображении $a: \mathcal{C} \rightarrow T$ не каждый элемент множества T является образом хотя бы одного элемента множества \mathcal{C} , так как любая отличная от A точка плоскости при этом отображении ничему не соответствует. Однако этот факт не мешает нам говорить об отображении $a: \mathcal{C} \rightarrow T$. Вообще в случае произвольного отображения (1) в области значений N могут быть элементы, не имеющие прообраза. Другими словами, образы всех элементов области определения M содержатся в области значений (и только в этом множестве), но совокупность всех образов не обязана совпадать с областью значений.

3. Выяснив смысл понятия «отображение», можно дать определение функции: *функцией называется отображение одного множества чисел в другое множество чисел.*

Таким образом, функция — тот частный случай отображения, когда и область определения и область значений — *числовые* множества. Именно такое толкование термина «функция» широко распространено в высшей математике (где имеются также другие специальные названия — вектор-функция, функционал, оператор, преобразование и т. д., отвечающие случаям, когда область определения или область значений имеют иную природу). Впрочем, следует иметь в виду, что довольно часто термин «функция» употребляют и как точный синоним термина «отображение». В элементарной математике термин «функция» используется в еще более узком смысле, а именно в случае, когда область определения — некоторое подмножество множества D действительных чисел, а область значений — множество D (см. [2], § 38).

Конечно, в школьном курсе математики легко обойтись и без понятия отображения: считая понятие функции первичным, не определяемым, можно описать смысл этого последнего, например, так: *говорят, что задана функция, если задано (непустое) подмножество множества действительных чисел и каждому числу из этого подмножества поставлено в соответствие одно вполне определенное действительное число.*

Однако понятие отображения, очень наглядное и допускающее яркие и разнообразные иллюстрации, представляется вполне доступным для понимания учащихся. Кроме того, это понятие позволяет познакомить школьников с функциональными зависимостями более общими, чем числовые функции, что весьма важно для формирования научного мировоззрения.

Подчеркнем, что (независимо от того, как именно вводить понятие функции — непосредственно или через понятие отображения) точное понимание смысла термина «функция» включает в себя *два неразделимых момента*: описание области определения $M \subset D$ и задание соответствия, при котором для каждого числа $x \in M$ указывается ровно одно действительное число y .

Если закон соответствия обозначить для краткости буквой f , то символом $f(x)$ логично условиться записывать число y , соответствующее числу $x \in M$ в силу правила соответствия f . Тогда функцию можно записать в виде

$$f(x), x \in M.$$

Часто используется (см. [2], [6]) иная запись, аналогичная (2):

$$x \rightarrow f(x), x \in M.$$

Более традиционным и широко распространенным является такое обозначение функции:

$$y = f(x), x \in M. \quad (3)$$

Пример 6. Каждому (действительному) числу, заключенному между 0 и 1 (включая эти значения), поставим в соответствие его квадрат. Очевидно, тем самым определена функция $x \rightarrow x^2, x \in [0, 1]$.

Пример 7. Каждому (действительному) числу поставим в соответствие его квадрат; тем самым будет определена функция $x \rightarrow x^2, x \in D$.

Сравним эту функцию и функцию, рассмотренную в примере 6. В обоих случаях над выбранным числом x надо произвести одну и ту же операцию — умножить число x на себя, чтобы получить образ. Однако эти функции, конечно, различны, так как у них не совпадают области определения.

Пример 8. Каждому (действительному) числу t поставим в соответствие число

$$k(t) = \begin{cases} 100^{\lg t}, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t = 0, \\ 100^{\lg(-t)}, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Ясно, что тем самым определяется функция $t \rightarrow k(t)$, $t \in D$. Обратим внимание, что эта функция *совпадает* с функцией, определенной в примере 7. В самом деле, эти функции имеют одну и ту же область определения, а законы соответствия, хотя и заданы (описаны) в различной форме, таковы, что *каждому* действительному числу ставится в соответствие в обоих случаях *одно и то же* действительное число (вычисление образа любого действительного числа по каждому из этих правил всегда приводит к одному и тому же результату).

4. По поводу термина «функция» необходимо сделать следующие замечания. Дело в том, что в школьной математике это слово используется и в нескольких других смыслах, что, к сожалению, не всегда достаточно четко разъясняется в учебниках. Однако именно из-за «разночтений» вкладываемого в это слово смысла иногда происходят недоразумения.

Во-первых, *функцией* часто называют букву y в записи (3); в этом же смысле употребляется термин «*зависимая переменная*». Буква x в записи (3) называется *аргументом*, или *независимой переменной*. Любое конкретное число x_0 из области определения называется *значением аргумента*, а соответствующее ему число $y_0 = f(x_0)$ называется *значением функции*.

Во-вторых, *функцией* часто называют само только правило соответствия, которое в записи (3) символизируется буквой f и которое для каждого числа x из области определения указывает соответствующее ему (действительное) число y .

Наиболее часто в школе рассматривается тот случай, когда правило f задано *аналитически*, при помощи явной формулы, содержащей букву x , знаки операций и числа и тем самым указывающей алгоритм, который позволяет по любому конкретному значению аргумента x_0 (из области определения) вычислить соответствующее ему значение функции y_0 .

Следует иметь в виду, что сама по себе формула вида $y = f(x)$ не определяет еще, строго говоря, функцию, поскольку не описано то множество значений x , над ко-

торыми надо производить указанные в формуле операции. С этой точки зрения типичная школьная формулировка задачи: «Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\cos(\cos x) + \arcsin \frac{1+x^2}{2x}} \quad (4)$$

является некорректной. Здесь можно было бы говорить лишь об области определения аналитического выражения в правой части равенства (4), т. е. о совокупности действительных значений x , для которых предусмотрены там операции выполнимы в множестве действительных чисел.

Однако в школе обычно принимается следующее дополнительное соглашение (которое далеко не всегда формулируется явно и четко): формула $y=f(x)$, где $f(x)$ — аналитическое выражение, содержащее букву x , знаки действий и числа, называется функцией в том смысле, что 1) в качестве области определения берется множество всех тех действительных чисел, при подстановке каждого из которых вместо x в выражение $f(x)$ указанные там действия выполнимы в области действительных чисел и дают однозначный результат; 2) каждому числу x_0 из области определения соответствует число $y_0=f(x_0)$.

Подчеркнем, что перечень операций, описанный выражением $f(x)$, для каждого действительного числа x_0 должен позволить вычислять одно вполне определенное действительное число $f(x_0)$. Поэтому нельзя говорить, например, о «функциях» $y=\pm\sqrt{x}$, $y=\pi n-x$, где n — любое целое число, и т. п.; точно так же бессмысленно называть «функциями» формулы вида

$$y^2=1-x^2, \quad y=|y|\cos x, \quad |x+y|=1, \quad \cos x-\cos y=0$$

и им подобные (см. [3], § 1, 34, 35).

Сформулированное соглашение особенно важно иметь в виду в тех случаях, когда, рассматривая функцию $y=f(x)$, в ходе ее исследования преобразуют аналитическое выражение $f(x)$ к некоторому другому виду, более удобному по тем или иным причинам. Например, функцию

$$y = \frac{\sin x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} + \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}} \quad (5)$$

целесообразнее записывать в преобразованном виде:

$$y = \sin x \cdot |\cos x| + \cos x \cdot |\sin x|. \quad (6)$$

Однако формулы (5) и (6) (с учетом сделанного выше соглашения) определяют *разные* функции — у них различные области определения (хотя на пересечении областей определения эти функции принимают одинаковые значения). Точно так же различные функции определяются формулами

$$y = x^{1/\lg x} \text{ и } y = 10;$$

$$y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x \text{ и } y = 1 \text{ и т. д. (ср. [7]).}$$

5. Здесь уместно несколько отклониться от темы и остановиться на одном важном вопросе. Как показывает опыт, характерным недостатком преподавания математики в школе является следующее обстоятельство: учащихся учат лишь формально проводить алгебраические и тригонометрические преобразования (правильно раскрывать скобки, верно подсчитывать общий знаменатель и т. п.), не обращая внимания на то, где осуществляемые выкладки законны и где справедливы получающиеся в ходе преобразований равенства.

Поясним сказанное на примере следующей задачи: «Упростить выражение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3 \sin x} [(2 \cos x - \sin x) \operatorname{ctg} x + 2 \sin x + \cos x] \times \\ & \times \left[1 + \left(\frac{\sqrt{3} \sin x}{2 \cos x - \sin x} \right)^{-2} \right]^{-1} - \\ & - \frac{\cos 2x [2(1 - \sin x \cos x) + (\sin x + \cos x)^2]}{6(\sin x + \cos x)^2 (1 - \sin x \cos x)} \end{aligned}$$

и найти все значения x , при которых это выражение обращается в нуль».

Довольно простые преобразования, использующие хорошо известные школьникам формулы, позволяют привести данное выражение (обозначим его для краткости через $P(x)$) к виду

$$Q(x) \equiv \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x},$$

после чего записывается такое равенство:

$$P(x) = Q(x). \quad (7)$$

Далее, из этого равенства и того очевидного факта, что $Q(x)$ обращается в нуль при

$$x = k\pi, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (8)$$

«естественно» сделать вывод, что исходное выражение $P(x)$ равно нулю при указанных в (8) значениях x . Однако проверка подстановкой показывает, что это не так: при значениях (8) выражение $P(x)$ не определено.

Чем же объясняется, что окончательное выражение $Q(x)$ обращается в нуль при некоторых значениях x , а «равное ему» исходное выражение $P(x)$ при тех же значениях x не определено? Для того чтобы разобраться в этом, необходимо выяснить точный смысл равенства (7).

Строго говоря, две функции

$$f_1(x), x \in M_1 \text{ и } f_2(x), x \in M_2$$

равны (одинаковы), если они имеют одну область определения (т. е. множества M_1 и M_2 совпадают) и каждому числу из области определения ставят в соответствие одно и то же значение (т. е. для любого $x_0 \in M_1 \equiv M_2$ имеет место равенство $f_1(x_0) = f_2(x_0)$). Но может случиться так, что эти две функции не равны, однако на некотором общем подмножестве m своих областей определения ($m \subset M_1$ и $m \subset M_2$) принимают одинаковые значения. Этот факт можно записать в следующей форме:

$$f_1(x) = f_2(x), \quad x \in m,$$

и говорить о *равенстве* (совпадении) *функций на указанном множестве*.

В рассмотренной задаче в процессе формально проведенных выкладок, приведших нас от выражения $P(x)$ к выражению $Q(x)$, было использовано преобразование, расширившее область определения выражения $P(x)$ (т. е. то множество значений x , при которых выражение $P(x)$ имеет смысл). Поэтому *функции* $P(x)$ и $Q(x)$ (здесь снова прибегаем к сформулированному выше соглашению) — это *разные функции*, ибо область определения функции $Q(x)$ шире (эта функция определена, в частности, для значений (8), которые не принадлежат области определения функции $P(x)$). Однако на области определения функции $P(x)$ эти функции действительно принимают одинаковые значения.

Следовательно, точный смысл равенства (7) следующий: оно означает, что на области определения функции $P(x)$ функции $P(x)$ и $Q(x)$ принимают одинаковые значения. В приведенном выше решении задачи равенство (7) было использовано формально, без анализа и указания тех значений x , для которых оно справедливо. Из-за этого было сделано ошибочное заключение о том, что $P(x)$ обращается в нуль при значениях (8); как раз при интересовавших нас значениях (8) равенство (7) не имеет места.

Для того, чтобы не допускать подобных ошибок, необходимо равенства типа (7) всегда рассматривать вместе с описанием совокупности значений x , для которых это равенство справедливо.

Умение верно описывать совокупность значений x , при которых имеет смысл некоторое выражение $P(x)$, и понимание того, как именно область определения этого выражения изменяется в результате выполнения тех или иных преобразований, приобретает исключительно важное значение при решении уравнений. Ведь очень часто в ходе решения уравнения $P(x)=0$ приходится преобразовывать выражение $P(x)$ к виду $Q(x)$, переходя тем самым к уравнению $Q(x)=0$. В этом случае надо стараться не допускать сужения области определения, специально исследовать те значения x , которые «выпадают», если сужения избежать не удастся, и делать проверку, если область определения расширилась.

Не будем сейчас подробно останавливаться на методах решения уравнений, но сделаем одно принципиальное замечание. Часто у учащихся складывается впечатление, что алгебраические преобразования надо осуществлять по одним формулам, понятным и доказанным в учебнике, а при решении уравнений необходимо применять другие формулы, специально придуманные и отсутствующие в учебниках. Например, при решении примеров на преобразование логарифмических выражений используются формулы

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^2 = 2 \log_a x$$

и др. Но как только речь заходит о решении логарифмических уравнений — рекомендуется применять уже другие формулы:

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|, \quad \log_a x^2 = 2 \log_a |x|.$$

Создается ложное мнение, что преобразование выражения $R(x)$ и преобразование левой части уравнения $R(x)=0$ — разные задачи.

Причина такого весьма распространенного заблуждения кроется в следующем. Всевозможные школьные упражнения на применение разных формул проводятся лишь в (неявном) предположении, что встречающиеся в преобразуемых выражениях буквы обозначают *положительные* числа. Эти упражнения, весьма многочисленные, помогают, вероятно, заучить основные формулы, но не способствуют пониманию того важного факта, что преобразование выражения $R(x)$ всегда надо проводить *во всей его области определения*. Поэтому-то требование при решении уравнения $R(x)=0$ следить за областью определения и воспринимается как что-то «специфическое для уравнений».

Много времени в школе уделяется задачам, в которых речь идет об *установлении* (проверке) того или иного равенства, например: «Доказать, что

$$1 = -\cos 2x \left[1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} (\pi - 2x) \right].$$

К сожалению, и в этих задачах на первый план часто выдвигаются формальные моменты манипулирования с основными формулами алгебры и тригонометрии.

Между тем сама постановка такого рода задач нуждается в уточнении. Уже говорилось, что любое равенство типа (7) надо рассматривать *вместе* с описанием (указанием) той совокупности значений x , для которых оно справедливо. Поэтому для того, чтобы доказать (или опровергнуть) некоторое равенство типа (7), мы должны *заранее знать* то множество значений x , на котором исследуется вопрос о справедливости этого равенства.

В школьном курсе в задачах на доказательство равенств («доказательство тождеств») *предполагается* (и это должно быть четко оговорено и разъяснено), что *равенство рассматривается при всех тех значениях x , при которых имеет смысл и левая и правая его части одновременно*. Следовательно, решение задач такого типа — это не просто цепочка формальных выкладок, приводящая, скажем, левую часть равенства к правой. Строго говоря, решение должно включать два момента:

1) отыскание множества значений x , при каждом из которых обе части подлежащего проверке равенства имеют смысл; 2) доказательство того, что при каждом значении x из найденного множества левая и правая части проверяемого равенства принимают одинаковые числовые значения.

6. В процессе обучения школьники знакомятся с большим числом конкретных примеров функций, с целыми классами функций (линейные функции, логарифмические функции и др.) и с некоторыми комбинациями таких функций. Довольно часто в методической литературе делаются попытки точно определить класс «элементарных функций», являющийся объектом изучения в школьной математике, по этому поводу иногда возникают дискуссии.

Однако представляется, что дать такое определение исходя из объективных, научных концепций невозможно. Более того, все попытки сформулировать такое определение вольно или невольно приводят к *подмене понятия функции аналитическим выражением*.

Рассмотрим одну из попыток определить класс «элементарных функций»: «*Элементарной* называют такую функцию, которую можно задать одной формулой, составленной из *основных элементарных функций* при помощи конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции». При этом «к основным элементарным функциям относятся следующие: 1) степенная функция... 2) показательная функция... 3) логарифмическая функция... 4) тригонометрические функции... 5) обратные тригонометрические функции» (см. [5], стр. 13,10).

С точки зрения этого определения функция

$$y = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

не является элементарной, так как она задана *не одной* формулой, а несколькими. Это уже само по себе странно, ибо рассмотренная функция представляется гораздо более простой, более элементарной (в общем смысле этого слова), чем, скажем, функция

$$y = \sqrt[3]{\frac{1 + \log_5 (\sin^2 x + \sqrt{\arctg (2x+3)})}{x^2 2^x - (\log_x \sin x)^{\sqrt{2}}}};$$

последняя, хотя и подпадает под определение элементарной функции, с трудом может быть изучена даже средствами высшей математики.

Но хуже то, что включение (или невключение) функции в класс элементарных поставлено в зависимость от того, в каком виде функция задана. Кстати, функцию (9) можно записать и в виде одной формулы

$$y = \frac{x + |x|}{2x}, \quad (10)$$

но и в этом случае определение не признает ее элементарной, ибо в числе основных элементарных функций отсутствует функция $y = |x|$. Между тем функция

$$y = \frac{x + \sqrt{x^2}}{2x} \quad (11)$$

элементарной признается. А ведь формулы (10) и (11) — это одна и та же функция!

Ясно, что классификация, основанная на том, можно или нельзя придумать для функции аналитическое выражение, использующее «привычные» символы, не является удачной.

Любая функция может быть записана в виде одной формулы; для этого достаточно лишь договориться о специальном обозначении для нее. Например, функция «целая часть» обозначается так: $y = [x]$.

Этот символ ровно ничем не хуже символа $y = x^2$, и то, что функция $y = x^2$ относится к элементарным, факт не объективный, а исторический. Если функция «целая часть» прочно войдет в школьную программу (а она уже вошла в учебники), если ее обозначение станет общеизвестным и общепринятым (а оно уже устоялось), то через некоторое время можно будет смотреть на эту функцию как на нечто вполне «элементарное».

7. Помимо изучения конкретных функциональных зависимостей, школьная программа предусматривает ознакомление учащихся с некоторыми общими свойствами функций (монотонность, ограниченность, четность, нечетность, периодичность) и с рядом общих понятий (обратная функция, сложная функция). Остановимся более подробно лишь на свойстве периодичности.

Вот определение, взятое из школьного учебника: «Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует число $T \neq 0$, такое, что при всех значениях x

из области определения этой функции $f(x+T)=f(x)$. Число T в этом случае называется *периодом* функции». Несколько дальше в учебнике доказывается *основное свойство* периодических функций: «если число T есть период функции $f(x)$, то при любом целом n число nT также период этой функции» (см. [8], § 207)¹.

Легко, впрочем, заметить, что здесь не все обстоит благополучно. Действительно, согласно этому определению функция $y=\sin(\sqrt{x})^2$ должна быть названа периодической с периодом $T=2\pi$, поскольку «при всех значениях x из области определения», т. е. при всех $x \geq 0$, имеем

$$\sin(\sqrt{x+2\pi})^2 = \sin(x+2\pi) = \sin x = \sin(\sqrt{x})^2.$$

В то же время число -2π (получающееся из выражения nT при $n=-1$) периодом этой функции не является: равенство $\sin(\sqrt{x-2\pi})^2 = \sin(\sqrt{x})^2$ неверно, например, при $x=0$ (при этом значении x левая часть равенства теряет смысл).

Конечно, определение не может быть верным или неверным—это не теорема—и оно не доказывается, но оно должно быть *целесообразным*. В нашем случае целесообразно дать такое определение периодичности, чтобы подпадающие под него функции действительно обладали сформулированным выше основным свойством, так как именно оно играет важную роль в теории периодических функций, рядов Фурье и т. д. На примере только что было показано, что из приведенного определения это свойство, вообще говоря, не вытекает.

Но как же, тем не менее, в учебнике [8] это свойство доказывается? Посмотрим, например, как там устанавливается тот факт, что если число $T \neq 0$ — период функции $f(x)$, то и число $-T$ тоже период. Для этого привлекается цепочка равенств

$$f(x-T) = f[(x-T)+T] = f(x).$$

Однако ясно, что эту цепочку можно написать, лишь предполагая, что ее первый член — символ $f(x-T)$ — имеет смысл, т. е. что число $(x-T)$ принадлежит обла-

¹ Точно так же (или почти так же) этот вопрос излагается и во многих других книгах; см., например, [2], §83; [5], стр. 31—32; [9], § 67.

сти определения функции $f(x)$. Между тем из приведенного определения периодичности *не вытекает*, что если x принадлежит области определения функции $f(x)$, то и $(x-T)$ принадлежит области определения этой функции. (Именно это обыграно в нашем контрпримере.) Таким образом, проведенное в учебнике [8] доказательство основного свойства периодических функций некорректно, ибо не следует букве принятого определения.

Это доказательство будет безупречным лишь в том случае, если число $T \neq 0$, о котором идет речь в определении, обладает не только тем свойством, что при всех значениях x из области определения функции $f(x)$ выполнено равенство $f(x+T)=f(x)$, но и таково, что для любого значения x из области определения число $(x-T)$ также принадлежит этой области.

Кстати, еще раз вернемся к словам: «существует число $T \neq 0$ такое, что при всех значениях x из области определения $f(x+T)=f(x)$ ». Наученные осторожности, мы об этом равенстве можем говорить, лишь предполагая, что для любого значения x из области определения функции $f(x)$ число $(x+T)$ также принадлежит этой области, иначе нельзя было бы придавать смысл символу $f(x+T)$. Но это предположение лучше явно оговорить в определении, а не подразумевать его.

Окончательно, точное определение периодичности, при котором имеет место указанное выше основное свойство периодических функций, следует формулировать так: *функция $y=f(x)$ называется периодической, если существует число $T \neq 0$ такое, что 1) для любого числа x из области определения этой функции числа $(x+T)$ и $(x-T)$ также принадлежат ее области определения; 2) при всех x из области определения этой функции $f(x+T)=f(x)$.*

Условия, которым должна удовлетворять область определения периодической функции, часто упускают из виду, хотя они иногда позволяют существенно упростить выяснение вопроса о периодичности конкретной функции. Например, для доказательства того, что функция $y=\sin(1/x)$ не является периодической, нет нужды проводить какие-либо выкладки, проще рассуждать от противного. Допустим, что $T \neq 0$ период этой функции. Так как точка $x_0 = -T$, очевидно, принадлежит области определения нашей функции, то и точка $x_0 + T = 0$ должна

принадлежать этой же области, что неверно. Следовательно, функция $y = \sin(1/x)$ не может быть периодической.

Обратим внимание, что функция является периодической, если определенным условиям удовлетворяют *как ее область определения, так и ее значения*. Точно такую же структуру имеют определения четной и нечетной функций (поэтому требование симметричности области определения относительно начала координат в этих случаях лучше внести непосредственно в определения — см. [8], § 206).

И еще одно замечание, касающееся изучения свойств функций. Учащиеся обычно легко справляются с задачами, где требуется доказать, что некоторая функция является, скажем, монотонной на указанном отрезке (интервале). Однако на вопрос: «Что значит, что функция $y=f(x)$ не является монотонной на отрезке $[a, b]$?» получить правильный ответ удастся далеко не всегда. Задачи типа «Доказать, что функция $y = x \sin x$ не является ограниченной во всей области определения», «Доказать, что функция $y = x^2 + x + 1$ не является периодической» вызывают существенные затруднения именно из-за неумения правильно сформулировать утверждение, обратное соответствующему определению.

Между тем тщательное рассмотрение и разъяснение всех подобных вопросов повысило бы как математическую подготовку, так и общую логическую культуру школьников, привело бы к лучшей организации их мышления.

8. С понятием функции тесно связано изучаемое в школе понятие графика функции. Обычно *график* функции $y=f(x)$ определяется как *геометрическое место точек плоскости, прямоугольные координаты x и y которых удовлетворяют равенству $y=f(x)$* . Другими словами, для того, чтобы получить график функции, надо ввести на плоскости декартову систему координат и рассмотреть множество всех тех точек, абсциссами которых являются значения аргумента данной функции, а ординатами — соответствующие значения функции.

При всей безусловной геометрической наглядности этого определения оно имеет, однако, существенный недостаток: определяя график некоторой функции, приходится привлекать еще дополнительно систему декарто-

вых координат. Таким образом, определяется не понятие графика функции *как таковое*, а понятие графика функции *в выбранной координатной плоскости*.

На практике часто (в силу тех или иных соображений) применяется не декартова, а другая система координат, например, полярные координаты. Легко сообразить, что функция $y = x_2 + 1$, изображающаяся в прямоугольных координатах хорошо знакомой кривой — параболой, в полярной системе координат изображается (если y трактовать как полярный радиус, а x — как полярный угол) совершенно непохожей на параболу кривой. А между тем обе эти кривые есть графики *одной и той же* функции, и поэтому надо уметь охарактеризовать то общее, что имеется у этих кривых.

Решить этот вопрос можно, если снова обратиться к понятию отображения. Уже говорилось, что задание отображения (2) включает в себя описание области определения M , области значений N и соответствия, при котором для каждого элемента $x \in M$ указывается один вполне определенный образ $f(x) \in N$. Элемент $x \in M$ и его образ $f(x)$ при рассматриваемом отображении можно представлять себе в виде упорядоченной пары $(x, f(x))$. Ничто не мешает нам рассмотреть все такие пары, т. е. всевозможные упорядоченные пары вида

$$(x, f(x)), \quad x \in M.$$

Множество всех упорядоченных пар вида $(x, f(x))$, где первый элемент пары x принадлежит области определения отображения, а второй элемент пары $f(x)$ есть образ первого элемента, называется *графиком отображения*. Таким образом, любое отображение имеет вполне однозначно определенный график.

Если введенное общее понятие графика отображения переформулировать применительно к функции, то можно сказать, что *график функции $y = f(x)$, $x \in M$ есть множество всех упорядоченных пар чисел вида $(x, f(x))$, где первый элемент пары — число x — принадлежит области определения M функции, а второй элемент пары — число $f(x)$ — есть значение функции, соответствующее значению x аргумента*.

Отсюда видно, что сформулированное таким образом определение графика функции не содержит какого-либо упоминания о системе координат, не имеет никакого гео-

метрического содержания. Оно, таким образом, свободно от всяких случайных обстоятельств и характеризует график функции исключительно через сам факт функциональной зависимости.

Можно далее поставить вопрос о той или иной интерпретации графика функции. Наиболее яркой и хорошо известной является геометрическая интерпретация множества пар чисел $\{(x, f(x))\}$ в виде точек кривой на плоскости с выбранной системой декартовых координат. Конечно, эта интерпретация лишь одна из возможных.

Остановимся еще на одном важном вопросе, имеющем принципиальное значение для правильного понимания функциональной зависимости. Учащимся сообщается, что «на практике часто пользуются *графическим* способом задания функций», т. е. с помощью кривых, «по которым можно судить о характере изменения одних величин в зависимости от изменения других величин» (см [8], § 202). Для точности добавим, что речь идет о кривых на плоскости с некоторой системой координат — сама по себе геометрическая кривая еще не характеризует каких-либо зависимостей.

Однако любые ли кривые в координатной плоскости определяют функции? Без точного выяснения этого вопроса так называемый «графический способ задания функций» остается нераскрытым. В общей постановке этот вопрос можно сформулировать так: любое ли множество упорядоченных пар $\{(x, y)\}$, $x \in M$, $y \in N$ может быть графиком некоторого отображения?

Совершенно ясно, что такое множество пар определяет отображение лишь в том случае, если в этом множестве не существует двух пар вида (x, y_1) , (x, y_2) с общим первым элементом и различными вторыми элементами. Иначе нельзя было бы однозначно ответить на вопрос о том, какой именно элемент множества N является образом элемента $x \in M$.

В частности, отсюда следует, что в плоскости с декартовой системой координат определяет функциональную зависимость y от x лишь такая кривая, которая с каждой прямой, параллельной оси ординат, пересекается не более одного раза. В случае полярной системы координат ответ получается несколько более сложным.

* *

*

За рамками этой статьи остались многие важные и принципиальные моменты, связанные с понятием функции и ее графика. В статье совсем не исследовались конкретные функции, не рассматривались многочисленные методы построения графиков, не были рассмотрены методические аспекты преподавания темы «Функции и графики» в школе. Да в этом едва ли есть необходимость — существует большое число книг (не говоря уже о журнальных статьях), хорошо известных учителям, где все стороны обсуждаются все эти вопросы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. Лекции и задачи по элементарной математике. М., «Наука», 1971.
2. Вейц Б. Е., Демидов И. Т. Алгебра и начала анализа. Пробный учебник. 9-й класс. М., «Просвещение», 1969.
3. Гурский И. П. Функции и построение графиков. М., «Просвещение», 1968.
4. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы (Избранные вопросы элементарной математики). М., «Наука», 1971.
5. Егеров В. К., Радунский Б. А., Тальский Д. А. Методика построения графиков функций. М., «Высшая школа», 1970.
6. Колмогоров А. Н. Что такое функция. — «Квант», 1970, № 1, стр. 27—36; Что такое график функции. — «Квант», 1970, № 2, стр. 3—13.
7. Колмогоров А. Н. О школьном определении тождества. — «Математика в школе», 1966, № 2, стр. 33—35.
8. Кочетков Е. С., Кочеткова Е. С. Алгебра и элементарные функции, ч. 1, 2. М., «Просвещение», 1969.
9. Кочетков Е. С., Кочеткова Е. С. Алгебра и начала анализа. Пробный учебник. 9-й класс. М., «Просвещение», 1969.
10. Хинчин А. Я. Педагогические статьи. М., Изд-во АПН РСФСР, 1963.
11. Хинчин А. Я. Восемь лекций по математическому анализу. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
12. Шилов Г. Е. Что такое функция? — «Математика в школе», 1964, № 1, стр. 7—15.
13. Сиханович Ю. А. Введение в современную математику. Начальные понятия. М., «Наука», 1965.

Н. Я. ВИЛЕНКИН,
доктор физико-математических наук,
И. М. ЯГЛОМ,
доктор физико-математических наук

ТЕОРИЯ ГРУПП И ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА



§ 1. ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ГЕОМЕТРИИ

1. Движения и конгруэнтность фигур. Математика изучает пространственные отношения и количественные отношения реального мира. В частности, геометрия возникла как наука, имеющая своим предметом изучение пространственных форм всевозможных тел. Это означает, что при изучении реальных тел геометр отвлекается от таких их свойств, как вес, цвет, запах, вкус и т. д.; его интересует лишь форма тела — является ли оно параллелепипедом, конусом, шаром и т. д. Отвлечение от физических и иных свойств реального тела приводит к понятию геометрического равенства или конгруэнтности: *два тела F и F_1 называются конгруэнтными* (будем это записывать так: $F \cong F_1$), *если их форма и размеры совпадают, т. е. если F можно совместить с F_1 с помощью некоторого движения в пространстве.* Свойства, общие всем конгруэнтным телам, называются геометрическими свойствами; лишь эти свойства тел и изучает геометрия.

Таким образом, играющее в геометрии самую основную роль понятие конгруэнтности фигур или тел основано на физическом понятии движения. Чтобы придать термину «конгруэнтность» точный («математический») смысл, необходимо описать движение без апелляции к физическим представлениям, исходя из одних лишь ма-

тематических понятий. Это можно сделать следующим образом¹. Будем считать первоначальным, не подлежащим определению, понятие расстояния $d(A, B)$ между двумя точками A и B .

Движением называют такое взаимно-однозначное соответствие между точками пространства (или плоскости), которое не меняет расстояний между точками. Иными словами, если образ точки A при движении g обозначить через $g(A)$, то движение характеризуется тем, что для любых двух точек A и B

$$d(g(A), g(B)) = d(A, B).$$

Отметим, что данное определение охватывает более широкий класс преобразований, чем движения в обычном смысле слова. Наряду с обычными движениями в него входят и симметрии относительно плоскостей (см. рис. 1,а), а также преобразования, получающиеся последовательным выполнением таких симметрий и обычных движений. Обычные движения (их еще называют *собственными движениями* или *движениями первого рода*) характеризуются тем, что они сохраняют ориентацию пространства².

¹ Ср. стр. 46 и 70.

² Пусть \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} — три единичных взаимно-перпендикулярных вектора в пространстве; тогда вращение на угол 90° , переводящее вектор \overline{OA} в вектор \overline{OB} , может наблюдаться из конца вектора \overline{OC} происходящим в направлении вращения часовой стрелки или в обратном направлении. Пусть теперь движение g переводит наши три вектора в векторы $\overline{O'A'}$, $\overline{O'B'}$ и $\overline{O'C'}$. Если движение на угол 90° , переводящее $\overline{O'A'}$ в $\overline{O'B'}$, наблюдается из конца вектора $\overline{O'C'}$ как происходящее в том же направлении, в каком наблюдается из конца вектора \overline{OC} вращение, переводящее \overline{OA} в \overline{OB} , то g называется *собственным движением* (*движением первого рода*); в противном же случае g есть *зеркальное движение* (*движение второго рода*).

Аналогично этому, если движение g плоскости переводит три точки A, B, C этой плоскости в точки $A'=g(A)$, $B'=g(B)$, $C'=g(C)$ и направления обходов треугольников ABC и $A'B'C'$ (от A к B и к C , соответственно — от A' к B' и к C') совпадают (т. е. оба совпадают с направлением вращения часовой стрелки или оба противоположны ему), то g называется *собственным движением*, а в противном случае — *зеркальным движением*. (По поводу собственных и зеркальных движений плоскости см., например, ч. I книг [12] и [14], а по поводу собственных и зеркальных движений пространства — ч. 2 книги [12].)

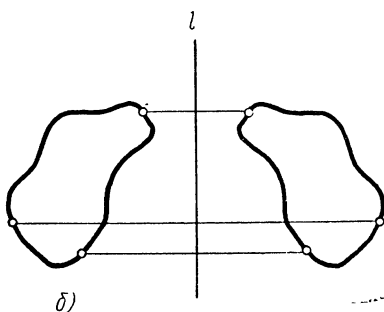
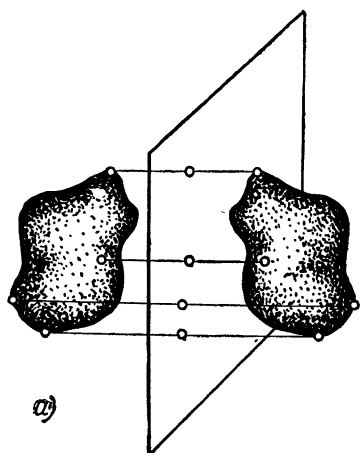


Рис. 1

Если движение пространства g переводит некоторую плоскость в себя, то оно задает движение в этой плоскости. Движения плоскости тоже разделяются на *собственные движения* или *движения первого рода* — они сохраняют ориентацию плоскости — и на *зеркальные движения* или *движения второго рода*, которые ориентацию плоскости меняют. Примером зеркального движения плоскости может служить осевая симметрия (рис. 1, б).

Основные свойства отношения конгруэнтности фигур таковы:

1. Каждая фигура F конгруэнтна сама себе, т. е.

для каждой фигуры F справедливо $F \cong F$ (рефлексивность отношения конгруэнтности).

2. Если фигура F_1 конгруэнтна фигуре F_2 , то и

F_2 конгруэнтна F_1 , т. е.

$$\text{если } F_1 \cong F_2, \text{ то } F_2 \cong F_1$$

(симметричность отношения конгруэнтности).

3. Если фигура F_1 конгруэнтна фигуре F_2 , а фигура F_2 конгруэнтна фигуре F_3 , то фигура F_1 конгруэнтна фигуре F_3 , т. е.

$$\text{если } F_1 \cong F_2 \text{ и } F_2 \cong F_3, \text{ то } F_1 \cong F_3$$

(транзитивность отношения конгруэнтности).

Поскольку понятие конгруэнтности связано с понятием движения, указанным сейчас свойствам конгруэнт-

ности должны соответствовать какие-то свойства движений. Чтобы сформулировать точнее эти свойства, введем понятие умножения движений.

Пусть заданы движения g_1 и g_2 . Их *произведением* g_1g_2 называется преобразование g , получаемое путем последовательного выполнения сначала движения g_2 , а потом движения g_1 . Иными словами, если движение g_2 переводит некоторую точку A в точку B , а движение g_1 переводит точку B в точку C , то преобразование g_1g_2 переводит A в точку C , т. е.

$$g_1g_2(A) = g_1(g_2(A)) = g_1(B) = C. \quad (1)$$

Равенство (1) поясняет кажущийся на первый взгляд неестественный порядок выполнения движений при умножении движения g_1 на g_2 — сначала выполняется g_2 , а потом g_1 . Произведение g_2g_1 определяется так: сначала выполняется движение g_1 , а потом — движение g_2 .

Следует отметить, что, вообще говоря, $g_1g_2 \neq g_2g_1$. Иными словами, *умножение движений не обладает свойством коммутативности* — произведение движений зависит от порядка сомножителей. Например, если g_1 — поворот плоскости вокруг точки O на 90° против часовой стрелки, а g_2 — параллельный перенос на расстояние a в направлении Ox (рис. 2), то преобразование g_1g_2 пе-

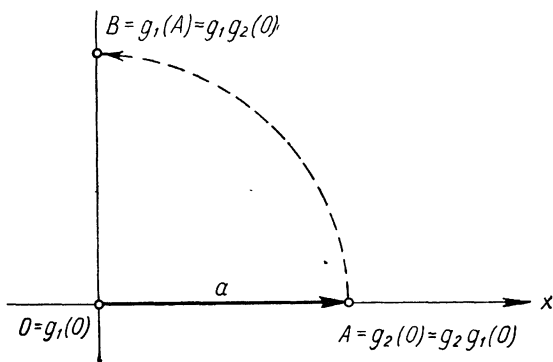


Рис. 2

реводит точку O в точку B (перенос g_2 переводит точку O в точку A , а поворот g_1 — точку A в B). Преобразо-

вание же g_2g_1 переводит \bar{O} в A (ибо g_1 оставляет \bar{O} на месте, а g_2 переводит O в точку A).

Перейдем к рассмотрению основных свойств умножения движений. Первое из них заключается в том, что *произведение двух движений снова является движением*. В самом деле, пусть A и B — две точки. Так как g_2 — движение, то $d(A, B) = d(A', B')$, где для краткости положено $A' = g_2(A)$, $B' = g_2(B)$. Далее, так как g_1 тоже движение, то $d(A', B') = d(A'', B'')$, где $A'' = g_1(A')$, $B'' = g_1(B')$.

Значит,

$$d(A, B) = d(A'', B'').$$

Поскольку

$$A'' = g_1(A') = g_1g_2(A), \quad B'' = g_1(B') = g_1g_2(B),$$

то получаем, что для любых точек A и B

$$d(g_1g_2(A), g_1g_2(B)) = d(A, B).$$

Но это и означает, что g_1g_2 — движение.

Доказанное свойство движений лежит в основе транзитивности отношения конгруэнтности фигур. В самом деле, пусть фигура F_1 конгруэнтна фигуре F_2 , а фигура F_2 — фигуре F_3 . Тогда существуют движение g_1 , переводящее F_1 в F_2 , и движение g_2 , переводящее F_2 в F_3 . Но в таком случае движение g_2g_1 переводит F_1 в F_3 , т. е. фигура F_1 конгруэнтна фигуре F_3 . Таким образом, транзитивность отношения конгруэнтности фигур следует из того, что произведение движений снова является движением. Заметим, что здесь умышленно не упоминалось о том, идет ли речь о движениях плоскости или пространства, так как утверждение верно в обоих случаях.

Обратимся теперь к свойству рефлексивности отношения конгруэнтности. Ему соответствует тот факт, что «преобразование» e , оставляющее на месте все точки (плоскости или пространства) является движением. Действительно, поскольку $e(A) = A$ и $e(B) = B$, то, очевидно,

$$d(e(A), e(B)) = d(A, B).$$

Движение e называется тождественным или единичным. Ясно, что любую фигуру преобразование e переводит саму в себя, а значит, каждая фигура конгруэнтна сама себе: $F=e(F)$ и, значит, $F\cong F$ (через $e(F)$ здесь обозначен образ фигуры F при «движении» e).

Заметим еще, что если g любое движение, то справедливы равенства

$$eg=ge=g.$$

В самом деле, тождественное преобразование оставляет все точки на месте, а потому, произведем ли мы это преобразование до движения g или после него, результат получится тот же самый, как если бы было сделано лишь само преобразование g .

Наконец, симметричность отношения конгруэнтности фигур связана с тем, что *движение, обратное любому движению, снова является движением*. При этом преобразование g^{-1} обратное преобразованию g определяется следующим образом: если A' есть образ точки A при движении g , т. е. если $A'=g(A)$, то g^{-1} переводит A' в A , т. е.

$$\text{если } A'=g(A), \text{ то } A=g^{-1}(A').$$

При этом, если g сохраняет расстояние между точками, т. е. является движением, то очевидно, что g^{-1} — тоже движение. Так, например, если g — параллельный перенос влево на расстояние a , то g^{-1} — параллельный перенос на a вправо; если g — поворот вокруг точки O на 90° против часовой стрелки, то g^{-1} — поворот вокруг той же точки на 90° по часовой стрелке (или, что то же самое, поворот на 270° против часовой стрелки). Ясно, что если движение g переводит фигуру F_1 в фигуру F_2 , то обратное ему движение g^{-1} переводит F_2 в F_1 ; поэтому, если фигура F_1 конгруэнтна F_2 , то и F_2 конгруэнтна F_1 , т. е.

$$\text{если } F_1\cong F_2, \text{ то } F_2\cong F_1.$$

Произведем теперь последовательно движения g и g^{-1} . В результате все точки вернутся в исходное положение, т. е. получим тождественное (единичное) преобразование e . Тот же результат получится, если сначала

сделать движение g^{-1} , а потом движение g . Таким образом, для любого движения g верны равенства

$$g^{-1} g = g g^{-1} = e.$$

Итак, мы установили, что основные свойства отношения конгруэнтности (транзитивность, рефлексивность и симметричность) являются отражениями следующих свойств множества движений:

1) *произведение двух движений* (т. е. результат последовательного выполнения движений) *является снова движением*;

2) *существует тождественное движение e* , оставляющее все точки (плоскости или пространства) на месте; оно обладает тем свойством, что для любого движения d

$$eg = ge = g;$$

3) *для каждого движения g существует обратное ему движение g^{-1}* , такое, что из $g(A) = A'$ следует, что $g^{-1}(A') = A$; движение g^{-1} обладает следующим свойством:

$$g^{-1} g = g g^{-1} = e.$$

2. Группы преобразований. Свойства (1) — (3), которыми обладает множество движений (плоскости или пространства), играют столь важную роль, что совокупности преобразований, обладающих этими свойствами, заслуживают специального наименования; их называют *группами преобразований*. При этом под преобразованием множества M любой природы понимается *взаимно-однозначное отображение этого множества на себя*, т. е. такое отображение g , что каждому элементу $x \in M$ отвечает единственный элемент $x' = g(x)$ — образ x при преобразовании g и каждому $z \in M$ отвечает единственный элемент u , такой, что $g(u) = z$ (u называется прообразом z при преобразовании g)¹. Как и в случае движений, произведение $g_1 g_2$ двух преобразований g_1 и g_2 определяется следующим образом:

$$g_1 g_2 (x) = g_1 (g_2 (x)).$$

¹ Ср. стр. 95.

Таким образом, преобразование g_1g_2 получается в результате последовательного осуществления заданных преобразований — сначала g_2 , а затем g_1 .

Совокупность G преобразований множества M составляет группу, если:

1) *произведение любых двух преобразований из совокупности G снова принадлежит совокупности G ;*

2) *совокупность G содержит тождественное (или единичное) преобразование e , оставляющее на месте все элементы множества M ;*

3) *вместе с каждым преобразованием g совокупность G содержит обратное g преобразование, т. е. такое преобразование g^{-1} , что из $g(x)=y$ следует $g^{-1}(y)=x$ (g^{-1} можно также определить равенствами $g^{-1}g=gg^{-1}=e$).*

Заметим, что если совокупность G преобразований обладает свойствами (1) и (3), то она является группой: наличие в G единичного преобразования e вытекает из свойств (1) и (3), поскольку $g^{-1}g=e$.

Рассмотрим несколько часто встречающихся примеров групп преобразований.

1. Мы уже видели, что совокупность всех *движений* (плоскости или пространства) образует группу. Также образует группу и совокупность всех *собственных движений*: ведь произведение g_1g_2 двух собственных движений тоже является собственным движением (ибо если g_2 не меняет ориентации плоскости или пространства и g_1 тоже не меняет ориентации, то и движение g_1g_2 не меняет ориентации плоскости или пространства; тождественное движение, разумеется, является собственным; движение g^{-1} , обратное собственному движению g , также является собственным движением).

В противоположность этому *совокупность всех зеркальных движений группы не составляет*, ибо произведение двух зеркальных движений всегда является собственным движением: так, например, произведение двух осевых симметрий с параллельными осями представляет собой параллельный перенос (рис. 3).

2. Совокупность всех *параллельных переносов* (плоскости или пространства) образует группу. В самом деле, произведение параллельного переноса на вектор **a** и параллельного переноса на вектор **b** есть параллельный перенос на вектор **a+b** (рис. 4); тождественное движение можно описать как параллельный перенос на нуле-

вой вектор 0 ; движение, обратное параллельному переносу на вектор \mathbf{a} , есть параллельный перенос на вектор $-\mathbf{a}$ (см. стр. 72).

Напротив, совокупность всех поворотов плоскости группы не образует. В самом деле, пусть p и q — повороты вокруг разных точек P и Q на один и тот же угол $\alpha < 180^\circ$, осуществляемые в разных направлениях (одно по часовой стрелке, а второе против). Тогда их произведение qr представляет собой уже не поворот, а параллельный перенос (рис. 5). А вот совокупность всех поворотов вокруг одной и той же точки снова составляет группу — проверьте это!

3. Совокупности всех параллельных переносов или всех поворотов вокруг фиксированной точки составляют части группы всех движений — говорят, что соответ-

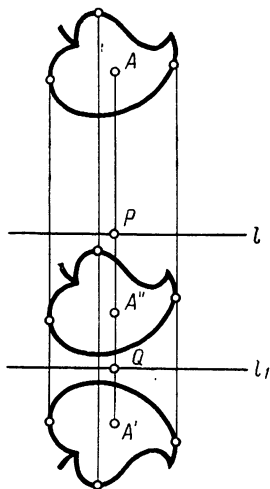


Рис. 3

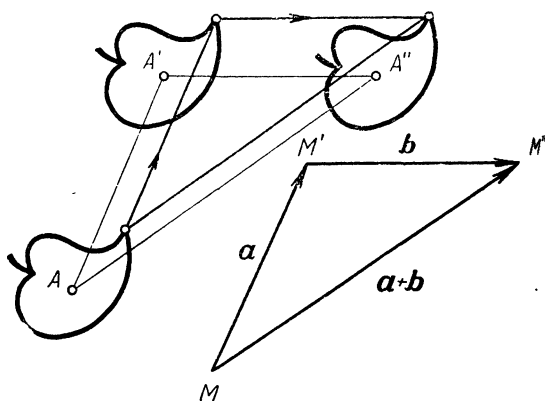


Рис. 4

ствующие группы являются подгруппами группы движений. Совокупность же всех без исключения преобразований подобия плоскости составляет группу более широкую, чем группа движений, так что здесь уже группа движений является подгруппой группы преобразований подобия. Напомним, что преобразование плоскости или пространства называется преобразованием подобия с

коэффициентом k (где k — любое положительное число), если оно увеличивает все расстояния в k раз, т. е.

$$\text{если } d(g(A), g(B)) = kd(A, B)$$

для любых двух точек A и B .

Таким образом, движения представляют собой частный случай преобразований подобия — это преобразова-

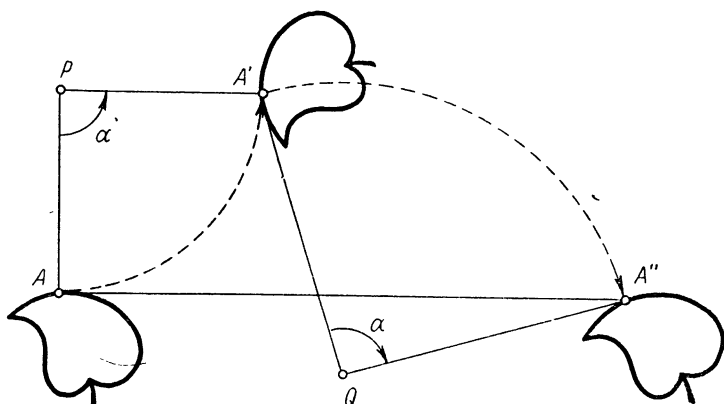


Рис. 6

ния подобия с коэффициентом 1. Ясно, что произведение двух преобразований подобия с коэффициентами k_1 и k_2 является преобразованием подобия с коэффициентом $k_1 k_2$; преобразование, обратное преобразованию подобия с коэффициентом k , есть преобразование подобия с коэффициентом $k' = 1/k$; наконец, тождественное преобразование можно рассматривать как преобразование подобия с коэффициентом 1.

Преобразования подобия сохраняют форму всех фигур, переводя каждую фигуру F в фигуру F' , подобную F ; в геометрии они играют очень важную роль. Примером преобразования подобия может служить сжатие к точке Q или гомотетия; сжатие к Q с коэффициентом k переводит каждую точку A плоскости в такую точку A' луча QA , что $QA'/QA = k$ (рис. 6).

4. Преобразование плоскости или пространства называется аффинным преобразованием, если каждую прямую оно переводит снова в прямую. Примером аффинного преобразования плоскости может слу-

жить сжатие к прямой l : сжатие к l с коэффициентом k переводит каждую точку A плоскости в такую точку A' луча PA (где P — проекция точки A на прямую l), что $PA/PA' = k$ (рис. 7). Нетрудно видеть, что совокупность всех *аффинных преобразований* плос-

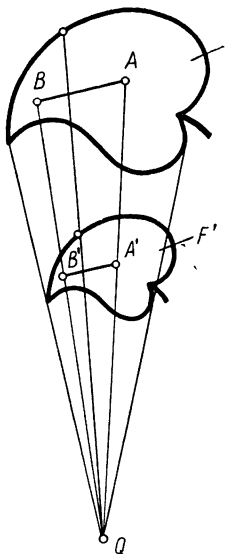


Рис. 6

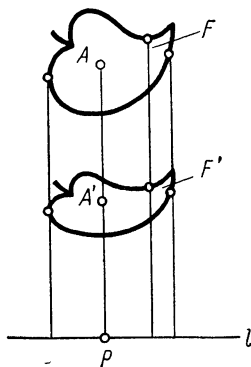


Рис. 7

кости (или пространства) образует группу: ведь если преобразования g и h переводят прямые в прямые, то и их произведение gh переводит прямые в прямые; единичное преобразование e переводит каждую прямую снова в прямую (в ту же самую!); если преобразование g переводит прямые в прямые, то и обратное ему преобразование g^{-1} также переводит прямые в прямые. Также составляет группу, например, совокупность так называемых *экваффинных преобразований* плоскости, т. е. таких аффинных преобразований, которые переводят каждую фигуру F в фигуру F' той же площади.

3. Эрлангенская программа Ф. Клейна. Выше были описаны некоторые группы преобразований плоскости (группа параллельных переносов, группа движений, группа преобразования подобия, группа аффинных преобразований и т. д.).

Пусть теперь G — какая-то группа преобразований плоскости, одна из названных выше или какая-либо другая. Выберем некоторую фигуру F плоскости и рассмотрим все фигуры, получаемые из F с помощью преобразований, принадлежащих данной группе G . Если G — группа движений, то связь между этими фигурами очевидна — все эти фигуры конгруэнтны друг другу. Если же F_1 можно перевести в F_2 с помощью преобразования из заданной группы G , то будем говорить, что F_1 G -конгруэнтна F_2 . Из того, что группа G обладает свойствами (1) — (3) (см. стр. 120) вытекает, что G -конгруэнтность обладает всеми «хорошими» свойствами обычной конгруэнтности: рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью.

Итак, с каждой группой преобразований плоскости мы связали понятие G -конгруэнтности. Тем самым с этой группой оказывается связана некоторая геометрия (ее можно назвать G -геометрией), изучающая лишь те свойства фигур, которые являются общими для всех G -конгруэнтных друг другу фигур — эти свойства можно назвать G -геометрическими свойствами. G -геометрические свойства фигур — это такие свойства, которые не меняются при всех преобразованиях группы G или, как говорят, *инвариантны* относительно преобразований этой группы. Если G — группа движений плоскости, то G -геометрия совпадает с обычной школьной геометрией. Впрочем, почти все факты, изучаемые в школьной геометрии, инвариантны и относительно группы преобразований подобия, в силу чего Ф. Клейн назвал эту группу «главной группой» (Hauptgruppe).

Если принять за G совокупность Π всех *параллельных переносов* плоскости, то получится « Π -геометрия», во многом отличная от евклидовой. Например, в Π -геометрии два треугольника ABC и $A'B'C'$ (рис. 8) такие, что

$$AB \stackrel{\Pi}{=} A'B', \quad AC \stackrel{\Pi}{=} A'C', \text{ равны т. е. } ABC \stackrel{\Pi}{=} A'B'C'$$

(знак $\stackrel{\Pi}{=}$ означает Π -конгруэнтность). Напротив, если принять за G группу S всех *собственных движений* плоскости, то в полученной на таком пути « S -геометрии» даже равенство всех сторон одного треугольника соответствующим сторонам другого не обеспечивает «равенства» (т. е. G -конгруэнтности) треугольников: так,

изображенные на рис. 9 треугольники ABC и $A'B'C'$ не C -конгруэнтны, ибо их нельзя совместить никаким собственным движением.

Зато если выбрать в качестве G группу A всех *аффинных преобразований* плоскости, то получим « A -геометрию», или аффинную геометрию, в которой

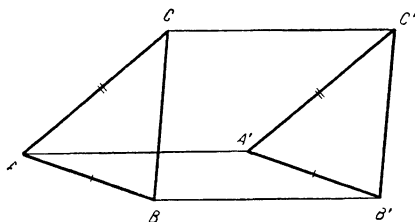


Рис. 8

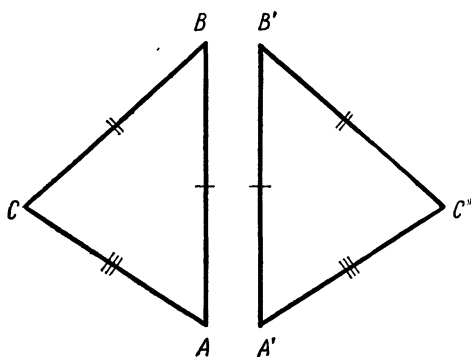


Рис. 9

любые два треугольника «равны» (A -конгруэнтны) — ведь каждый треугольник плоскости можно аффинным преобразованием перевести в любой другой (см., например, [15]). Точно так же и любые два параллелограмма «равны» в A -геометрии. Однако различие между параллелограммом и отличным от параллелограмма четырехугольником сохраняет смысл и в A -геометрии: как будет показано ниже, аффинное преобразование переводит параллелограмм снова в параллелограмм.

Аффинная геометрия беднее содержанием, чем обычная школьная геометрия — в ней нет, например, теоре-

мы Пифагора, так как само понятие прямого угла не имеет здесь смысла: прямой угол аффинное преобразование может перевести в острый или в тупой. Но теорема о том, что *диагонали параллелограмма делят друг друга пополам*, сохраняет силу и в аффинной геометрии. В самом деле, ведь прямые при аффинных преобразованиях переходят снова в прямые, а параллельные прямые — в параллельные прямые (если бы две параллельные прямые l_1 и l_2 перешли в пересекающиеся прямые l'_1 и l'_2 , то нарушилось бы свойство взаимной однозначности преобразования, ибо в одну точку пересечения l'_1 и l'_2 перешли бы две разные точки; одна из них принадлежит l_1 , а вторая — l_2). Поэтому свойство четырехугольника быть параллелограммом — это аффинное свойство (*A-свойство*). Аффинным является и свойство точки делить данный отрезок пополам: если аффинное преобразование переводит отрезок AB в отрезок $A'B'$, то середину S отрезка AB оно переводит в середину S'' отрезка $A'B'$. Значит, и теорема о точке пересечения диагоналей параллелограмма относится к аффинной геометрии.

Таким образом, не существует какой-то одной геометрии: с каждой группой G преобразований плоскости (или пространства) связана своя «геометрия» (G -геометрия), изучающая свойства фигур, инвариантные относительно преобразований из группы G .

Описанный теоретико-групповой подход к геометрии (ср. введения к книгам [14] и [16] или § 6 статьи [15]) был предложен видным немецким математиком Феликсом Клейном (который также установил, что и геометрия Лобачевского включается в общую схему « G -геометрий», см. [8], [9] или приложения к т. II книги [14]). Этот подход был изложен Клейном в лекции [10], прочитанной им в университете г. Эрлангена (Германия) и получившей впоследствии название «Эрлангенской программы». При этом Клейн указал, что среди инвариантных свойств фигур есть некоторые «основные», или «фундаментальные», само существование которых полностью характеризует группу G и тем самым — предмет G -геометрии.

Так, для группы движений плоскости или пространства основным инвариантом является *расстояние между точками*, так как условие сохранений расстояний харак-

теризует группу движений (ср. стр. 46) и, значит, из него уже вытекает, скажем, инвариантность при движениях углов между прямыми или инвариантность площадей фигур. Аналогично, для группы преобразований подобия основным инвариантом является *отношение AB/CD двух расстояний*: из существования этого инварианта уже вытекает, что преобразования подобия сохраняют углы или отношения площадей. Такой подход к G -геометриям связывает учение о «геометриях Клейна» с чисто алгебраической задачей отыскания инвариантов тех или иных групп преобразований (задаваемых, например, уравнениями, связывающими координаты произвольной точки A с координатами ее образа $A' = g(A)$) и тем самым прокладывает мостик между геометрией и алгеброй.

Теоретико-групповой подход к геометрии иногда проливает новый свет на содержание геометрических теорем и облегчает их доказательство. Так, например, для того чтобы установить, что *медианы треугольника пересекаются в одной точке*, достаточно заметить, что *понятие медианы является аффинным* (при аффинном преобразовании середина отрезка переходит в середину преобразованного отрезка, а значит, медиана треугольника — снова в медиану). Но с помощью аффинного преобразования любой треугольник можно преобразовать в равносторонний. А для равностороннего треугольника медианы совпадают с биссектрисами и потому пересекаются в одной точке — центре вписанной в треугольник окружности. Значит, и в любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке.

§ 2. ГРУППЫ В АЛГЕБРЕ

1. Группы подстановок. Выше было сказано, что *группой преобразований называется совокупность G преобразований любого множества M элементов, такая, что*

1) *произведение двух преобразований из G тоже принадлежит G ;*

2) *для каждого преобразования из G обратное преобразование также лежит в G .*

Наиболее простым является случай, когда M содержит конечное число n элементов, например, всего три

элемента: треугольник Δ , квадрат \square и круг \bigcirc . При этом преобразование, переводящее треугольник в круг, квадрат в треугольник и круг в квадрат, обозначим так:

$$\begin{pmatrix} \Delta & \square & \bigcirc \\ \bigcirc & \Delta & \square \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь в верхней строчке выписаны все элементы множества, а в нижней под каждым из них изображен тот элемент из M , в который переходит верхний элемент. Группы преобразований конечного множества M называются *группами подстановок*, а образующие эти группы преобразования — *подстановками*; так, например, подстановка (1) переводит Δ в \bigcirc , \square в Δ и \bigcirc в \square .

Нетрудно видеть, что всего существует шесть подстановок трех элементов Δ , \square и \bigcirc :

$$\begin{aligned} e \begin{pmatrix} \Delta & \square & \bigcirc \\ \Delta & \square & \bigcirc \end{pmatrix}, & a \begin{pmatrix} \Delta & \square & \bigcirc \\ \square & \bigcirc & \Delta \end{pmatrix}, & b \begin{pmatrix} \Delta & \square & \bigcirc \\ \bigcirc & \Delta & \square \end{pmatrix}, \\ u \begin{pmatrix} \Delta & \square & \bigcirc \\ \Delta & \bigcirc & \square \end{pmatrix}, & v \begin{pmatrix} \Delta & \square & \bigcirc \\ \bigcirc & \square & \Delta \end{pmatrix}, & w \begin{pmatrix} \Delta & \square & \bigcirc \\ \square & \Delta & \bigcirc \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При этом, скажем, $ua=v$ (ибо $ua(\Delta)=u(a(\Delta))=u(\square)=\bigcirc$, $ua(\square)=u(a(\square))=u(\bigcirc)=\square$, $ua(\bigcirc)=u(a(\bigcirc))=u(\Delta)=\Delta$). Подстановка v также переводит Δ в \bigcirc , \square в \square , \bigcirc в Δ :

$$v(\Delta)=\bigcirc, \quad v(\square)=\square, \quad v(\bigcirc)=\Delta.$$

Аналогично вычисляются результаты умножения любых двух элементов этой группы. Произведения любых двух из наших шести подстановок можно найти в следующей «таблице умножения»:

	e	a	b	u	v	w
e	e	a	b	u	v	w
a	a	b	e	w	u	v
b	b	e	a	v	w	u
u	u	v	w	e	a	b
v	v	w	u	b	e	a
w	w	u	v	a	b	e

В верхней строчке таблицы выписаны правые множители, а в левом столбце — левые множители; так, на пересечении столбца, отмеченного сверху буквой a , и строки, отмеченной слева буквой u , стоит буква v , ибо $ua=v$. Эта таблица называется таблицей Кэли группы шести подстановок e, a, b, u, v, w (эту группу называют также симметрической группой третьего порядка).

Группы подстановок (о них см., например, [1]) играют в алгебре очень большую роль.

2. Общее определение группы. Как было показано выше, умножение преобразований не обладает, вообще говоря, свойством коммутативности: произведения gh и hg преобразований g и h могут не совпадать. Покажем теперь, что умножение преобразований всегда обладает свойством ассоциативности: для любых трех преобразований f, g и h некоторого множества M

$$f(gh) = (fg)h. \quad (2)$$

В самом деле, пусть x — какой угодно элемент множества M , $h(x)=y$, $g(y)=z$ и $f(z)=t$. В таком случае $gh(x)=g(h(x))=g(y)=z$ и $[f(gh)](x)=f[(gh)(x)]=f(z)=t$; с другой стороны,

$$h(x)=y \text{ и } [(fg)h](x)=(fg)(h(x))=(fg)y=f(g(y))=f(z)=t.$$

Отсюда (так как элемент x произволен!) и вытекает равенство (2).

Выделяя то общее, что имеется у всех групп преобразований и у ряда других математических объектов (например, у чисел, для которых ведь тоже можно определить операцию умножения), математики пришли к общему понятию группы. А именно группой называется произвольное множество G элементов, для которых определена алгебраическая операция \circ , ставящая в соответствие любым двум элементам g и h группы G третий элемент из G , обозначаемый через $g \circ h$. Порядок элементов g и h здесь является существенным, ибо элемент $g \circ h$ может быть отличен от $h \circ g$.

При этом «групповая операция» \circ должна обладать следующими свойствами:

1) операция \circ ассоциативна: для любых трех элементов g, h, f группы

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h;$$

2) существует такой элемент e группы (он называется нейтральным элементом), что для каждого элемента g этой группы

$$g \circ e = e \circ g = g;$$

3) для каждого элемента g группы существует такой элемент \hat{g} (он называется симметричным с g), что

$$g \circ \hat{g} = \hat{g} \circ g = e.$$

Если, кроме того, операция \circ коммутативна, т. е. для любых двух элементов g и h группы

$$g \circ h = h \circ g,$$

то группа называется коммутативной, или абелевой.

Групповую операцию \circ иногда называют «умножением», заменяя запись $g \circ h$ на gh (при этом gh называют «произведением» элементов g и h). При использовании подобной мультипликативной терминологии и символики нейтральный элемент e называют «единичным» элементом группы G и даже обозначают его иногда просто цифрой 1 (не забывая, разумеется, что этим символом обозначено не число, а какой-то элемент из G !); элемент \hat{g} называют «обратным» к g и обозначают g^{-1} . В других случаях групповую операцию называют «сложением», обозначая элемент $g \circ h$ («сумму» элементов g и h) через $g+h$; при этом элемент e группы называют «нулевым» и даже обозначают иногда цифрой 0 (или буквой o). При использовании такой

аддитивной терминологии и символики элемент \hat{g} называют «противоположным» g и обозначают через $-g$.

Теория групп является важнейшей частью современной абстрактной алгебры, изучающей произвольные алгебраические системы A , характеризующиеся свойствами определенных для этих систем алгебраических операций, но не конкретным указанием элементов рассматриваемого множества A . В теории групп рассматриваются общие утверждения, которые можно вывести из данного выше определения группы; так, например, здесь устанавливается, что в любой группе есть лишь один нейтральный элемент e , или что для каждого элемента g

существует единственный элемент \hat{g} (ср. стр. 74). Можно также доказать, что если группа G содержит конечное число n элементов и некоторые m из этих элементов сами образуют группу (относительно определенной в G алгебраической операции), то n делится на m .

Приведем некоторые примеры групп, встречающиеся в школьном курсе математики.

1. Множество Z всех *целых чисел* образует группу относительно операции сложения. В самом деле, сумма двух целых чисел снова является целым числом. Роль нейтрального элемента e играет число нуль — ведь от прибавления нуля к любому целому числу это число не изменяется: $a + 0 = 0 + a = a$.

Элементом \hat{a} для числа a является $-a$, поскольку $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Наконец, сложение чисел обладает свойством ассоциативности, поскольку для любых трех (целых) чисел a , b и c имеем $(a+b)+c = a+(b+c)$. Группа Z коммутативна, так как для любых целых чисел a и b имеем $a+b=b+a$.

2. Множество V *векторов на плоскости* также образует группу относительно операции сложения векторов. Проверка проводится точно так же, как и для группы целых чисел. Эта группа тоже коммутативна. (Коммутативную группу образуют и *векторы в пространстве* относительно операции сложения векторов).

3. Множество Q_+ всех *положительных рациональных чисел* образует группу относительно операции умножения чисел. В самом деле, произведение двух положительных рациональных чисел — снова положительное рациональное число. Роль нейтрального элемента играет число 1; так, для любого положительного рационального числа a имеем $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Элементом \hat{a} для положительного рационального числа a является число $\frac{1}{a}$.

Наконец, умножение чисел обладает свойством ассоциативности.

Заметим, что множество всех рациональных чисел не образует группы относительно операции умножения — ведь число 0 не имеет обратного, поскольку нет такого числа a , что $a \cdot 0 = 1$. Не образует группы и множество натуральных чисел относительно операции сложения

(ибо в этом множестве нет нуля, т. е. нейтрального элемента группы) и множество всех целых чисел относительно умножения (ибо в этом множестве ни одно число a , кроме $+1$ и -1 , не имеет числа \hat{a}). Однако множество всех отличных от нуля (положительных и отрицательных) рациональных чисел образует группу относительно умножения.

§ 3. ГРУППЫ СИММЕТРИИ

1. Группы симметрии геометрических фигур. Даже далекий от геометрии человек скажет, что *квадрат — самый симметричный из всех четырехугольников*. Однако точный («математический») смысл последней фразы с первого взгляда не виден: ведь для того чтобы оправдать высказанное утверждение, надо научиться измерять «степень симметричности» фигур.

Чтобы преодолеть это затруднение, рассмотрим, прежде всего, множество самосовмещений фигуры F , т. е. *множество всех движений, переводящих F в себя*. Чем обширнее это множество, чем больше самосовмещений допускает данная фигура, тем она кажется симметричнее. С этой точки зрения наименее симметричными (и даже на чисто лишенными всякой симметрии) следует считать те фигуры F (например, изображенный на рис. 10 четырехугольник), множество самосовмещений которых состоит из одного единственного элемента — из тождественного движения e .

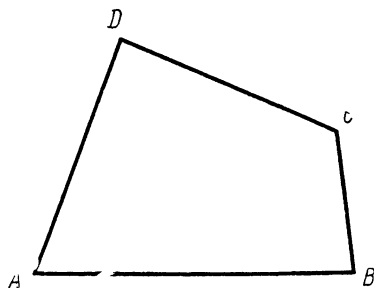


Рис. 10

Несколько более симметричными четырехугольниками являются параллелограмм (рис. 11,а) и равнобокая трапеция (рис. 11,б), множество самосовмещения которых состоит из двух элементов: для параллелограмма это будут тождественное движение и (центральная) симметрия относительно точки O , а для трапеции — тождественное движение и (осевая) симметрия относитель-

но прямой l . Еще более симметричными фигурами являются прямоугольник (рис. 12,а) и ромб (рис. 12,б), множество самосовмещений которых состоит из четырех элементов — тождественного движения, (осевых) симметрий относительно изображенных на рис. 12 прямых Ox и Oy и (центральной) симметрии относительно точки O .

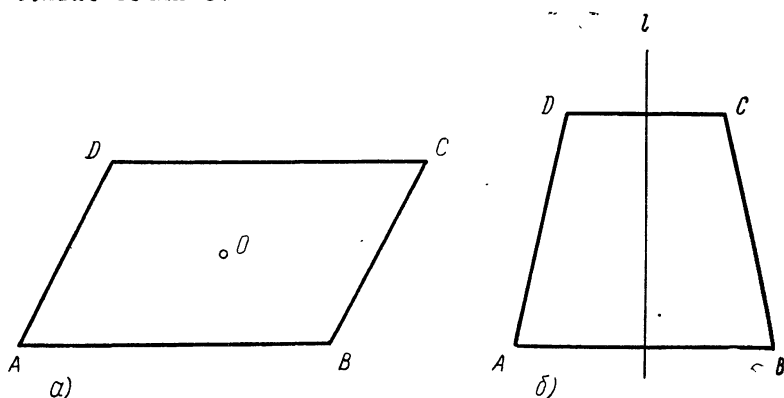


Рис. 11

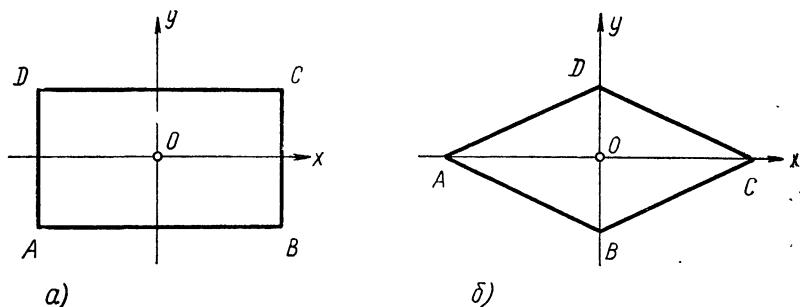


Рис. 12

Наконец, квадрат (рис. 13) обладает восемью самосовмещениями: к четырем самосовмещениям, которыми обладает каждый прямоугольник, здесь еще добавляются две симметрии относительно диагоналей квадрата AC и BD и два поворота на 90° и на 270° вокруг точки O (скажем, в направлении вращения часовой стрелки). *Большого числа самосовмещений не имеет ни один*

четырехугольник — именно поэтому и можно сказать, что квадрат является самым симметричным из всех четырехугольников.

Намеченная выше чисто количественная оценка симметричности фигуры (параллелограмм симметричен «на 2 очка»; прямоугольник симметричен «на 4 очка»; квадрат симметричен «на 8 очков») характеризует степень симметричности фигуры недостаточно полно: может случиться, что хотя множества самосовмещений двух фигур имеют одно и то же число элементов, эти множества обладают совершенно различным строением. Чтобы описать более полно множество самосовмещений фигуры, заметим, что для *любой* фигуры F множество ее самосовмещений образует группу. В самом деле, если дви-

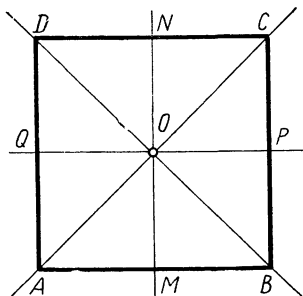


Рис. 13

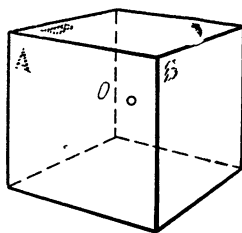


Рис. 14

жения g и h переводят фигуру F в себя, то и их произведение gh переводит F в себя (сначала h , а потом g переводят в себя F). Кроме того, тождественное преобразование оставляет фигуру F на месте, и если g переводит F в себя, то и обратное преобразование g^{-1} является самосовмещением фигуры F .

Группу, образованную всеми самосовмещениями фигуры F , называют группой симметрии этой фигуры. Для примера найдем группу симметрии куба. Она состоит из 48 элементов. В самом деле, обозначим грани куба (рис. 14) буквами A, B, C, D, E, F . Движение, переводящее куб на себя, переводит его грань A в одну из шести граней — в A , или в B , или в C , ..., или в F . Таким образом, множество G самосовмещений куба — его группа симметрии — распадается на шесть подмножеств, характеризуемых тем, в какую грань переходит

грань A . При этом множество H самосовмещений куба, переводящих грань A в себя (нетрудно видеть, что H есть подгруппа группы G), содержит восемь движений соответственно числу элементов группы симметрии квадрата A ; все же самосовмещения куба, переводящие A в B , могут быть описаны как произведения g_0h , где $h \in H$, а g_0 — произвольно фиксированное движение, переводящее A в B ; поэтому число подобных самосовмещений куба также равно восьми. Отсюда вытекает, что всего группа симметрии куба содержит

$$\underbrace{8 + 8 + \dots + 8}_{6 \text{ слагаемых}} = 6 \cdot 8 = 48$$

элементов; 24 из этих движений являются собственными, а 24 — зеркальными.

В частности, подмножество (подгруппа) собственных движений из G содержит тождественное движение e , $3 \cdot 3 = 9$ преобразований, состоящих из поворотов на 90° , 180° и 270° вокруг осей, проходящих через центр куба и перпендикулярных его граням, $2 \cdot 4 = 8$ поворотов на 120° и на 240° вокруг диагоналей куба и, наконец, $6 \cdot 1 = 6$ поворотов на 180° вокруг прямых, проходящих через середины противоположных ребер куба. Несобственные (зеркальные) самосовмещения куба могут быть описаны как произведения каждого из 24 собственных движений, переводящих куб в себя, на симметрию относительно центра куба.

Знание группы симметрии данной геометрической фигуры может быть использовано для решения связанных с этой фигурой геометрических задач.

Рассмотрим, например, следующую задачу: сколькими геометрически различными способами можно раскрасить грани куба шестью красками так, чтобы каждая грань была окрашена одним цветом, а различные грани имели разный цвет (два способа раскраски считаются *геометрически различными*, если их нельзя перевести друг в друга с помощью собственного движения куба).

Сначала сосчитаем общее число различных способов раскраски куба. Обозначим грани куба буквами A, B, C, D и E, F . Грань A можно окрасить любой из шести красок, после чего для окраски грани B остаются пять красок. Выбрав одну из этих красок, тем самым оставляем лишь четыре краски для окраски грани C ; и выбрав одну из них, оставим три краски для окраски грани D и т. д. По известному из комбинаторики правилу произведения (см., например, [5], стр. 17—18) получаем, что общее число способов раскраски куба равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ (способов).

Но число собственных самосовмещений куба равно 24. Поэтому каждому способу раскраски отвечают 24 геометрически одинако-

вых с ним способа. А тогда число геометрически различных способов равно $720:24=30$. (Если учитывать и несобственные самосовмещения куба, то число различных способов раскраски сведется к 15).

Другая задача, решаемая с помощью знания группы самосовмещений куба, такова: Найти сечение F куба плоскостью, проходящей через центр O куба и перпендикулярной его диагонали AC_1 (рис. 15).

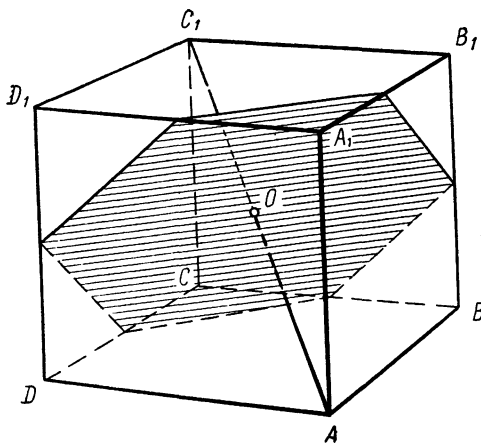


Рис. 15

Для решения этой задачи достаточно заметить, что диагональ AC_1 переходит в себя при трех поворотах α , β и γ куба на 0° (тождественное движение!), на 120° и на 240° вокруг AC_1 и при симметрии ω относительно точки O . Отсюда вытекает наличие шести самосовмещений куба (α , β , γ , $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$), переводящих F в себя. Фигура F (ясно, что это многоугольник, имеющий не более шести сторон) также переходит в себя при этих движениях (в плоскости фигуры F сводящихся к поворотам на 0° , 120° , 240° , 180° , 300° и 60° вокруг точки O). Но единственным плоским многоугольником, имеющим не более шести сторон и переходящим в себя при указанных поворотах, является правильный шестиугольник с центром O . Значит, F есть *правильный шестиугольник*.

Алгебраическая структура группы симметрии задается ее «таблицей умножения», или таблицей Кэли (ср. стр. 130). Так как полная таблица Кэли группы G симметрии куба слишком велика, то выпишем лишь ее часть — таблицу Кэли подгруппы H группы G (или, что то же самое, таблицу Кэли группы симметрии *квадрата* A). Здесь приняты следующие обозначения: e — тождественное движение; α , β и γ — повороты вокруг центра O квадрата против часовой стрелки на углы 90° , 180°

и 270° ; δ и ε — симметрии относительно «средних линий» MN и PQ квадрата, а λ и μ — симметрии относительно его диагоналей AC и BD (см. рис. 13).

	e	α	β	γ	δ	ε	λ	μ
e	e	α	β	γ	δ	ε	λ	μ
α	α	β	γ	e	λ	μ	ε	δ
β	β	γ	e	α	ε	δ	μ	λ
γ	γ	e	α	β	μ	λ	δ	ε
δ	δ	μ	ε	λ	e	β	γ	α
ε	ε	λ	δ	μ	β	e	α	γ
λ	λ	δ	μ	ε	α	γ	e	β
μ	μ	ε	λ	δ	γ	α	β	e

Рассматривая эту таблицу, замечаем, что в каждой ее строке и каждом столбце стоит некоторая перестановка букв $e, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda, \mu$. Кроме того, видно, что *произведение двух вращений или двух симметрий является вращением, а произведение вращения и симметрии — симметрией*.

Для *равностороннего треугольника* (рис. 16) группа симметрии имеет шесть элементов: тождественное движение e , повороты λ и μ на 120° и 240° вокруг центра O треугольника и симметрии ξ, η и ζ вокруг его высот AP, BQ и CR . Таблица Кэли этой группы имеет следующий вид:

	e	λ	μ	ξ	η	ζ
e	e	λ	μ	ξ	η	ζ
λ	λ	μ	e	ζ	ξ	η
μ	μ	e	λ	η	ζ	ξ
ξ	ξ	η	ζ	e	λ	μ
η	η	ζ	ξ	μ	e	λ
ζ	ζ	ξ	η	λ	μ	e

А для *параллелограмма* и для *равнобокой трапеции* таблицы Кэли групп симметрии выглядят одинаково:

	e	α
e	e	α
α	α	e

— только в случае параллелограмма α — это центральная симметрия, а в случае трапеции — осевая (e в обоих случаях — тождественное движение). Если не указать заранее, каким преобразованием является α , то по таблице Кэли нельзя будет узнать, о группе симметрии какой фигуры идет речь. Говорят, что эти две группы симметрии *изоморфны*. Вообще, *две конечные группы называются изоморфными, если их элементы можно*

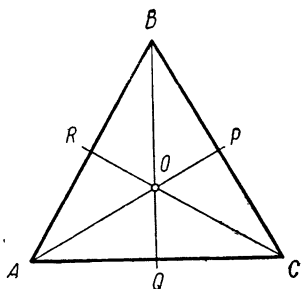


Рис. 16

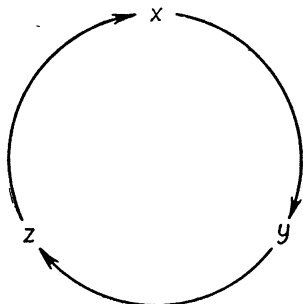


Рис. 17

*перенумеровать так, чтобы таблицы Кэли этих групп оказались одинаковыми. Например, изоморфны группа симметрии правильного треугольника и группа подстановок из трех элементов (ср. таблицы Кэли на стр. 138 и на стр. 129). Вообще группы G и H (которые теперь уже не обязательно должны быть конечными!) называются *изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие $g \longleftrightarrow h$ так, что**

из $g_1 \longleftrightarrow h_1$ и $g_2 \longleftrightarrow h_2$ следует, что $g_1 g_2 \longleftrightarrow h_1 h_2$.

Так, например, изоморфными являются группа по сложению векторов плоскости и группа параллельных переносов плоскости; на этом основании векторы иногда даже отождествляют с параллельными переносами (см., например, § 1 книги [3]).

В алгебре обычно отождествляют изоморфные группы, считая их различными реализациями одной и той же абстрактной группы. Таким образом, с точки зрения абстрактной алгебры (но не с точки зрения геометрии!) группы симметрии параллелограмма и равнобокой трапеции неразличимы.

Группы симметрии равнобокой трапеции и прямоугольника содержат разное число элементов, причем первая группа является *подгруппой* второй. Это и означает, что прямоугольник *более симметричен*, чем трапеция. Вообще, естественно считать, что *фигура F_1 более симметрична, чем фигура F_2 , если группа симметрии G_1 фигуры F_1 содержит группу симметрии G_2 фигуры F_2* (т. е. если группа G_2 является подгруппой G_1). Именно такой строгий смысл имеет утверждение о том, что из всех четырехугольников квадрат является наиболее симметричным.

2. Группы симметрии многочленов. Введенное выше понятие группы симметрии находит применение и в алгебре, где, однако, приходится говорить не о геометрических преобразованиях, а о подстановках алгебраических символов (скажем, переменных x, y, z) и о связанных с ними преобразованиях алгебраических выражений. Рассмотрим, например, многочлен $P(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$ и *все подстановки переменных x, y, z , которые переводят этот многочлен в себя*. Ясно, что в это множество подстановок входит подстановка $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}$, переводящая P в многочлен $yz^2 + zx^2 + xy^2$, совпадающий с $P(x, y, z)$, но не входит подстановка $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix}$, пере-

водящая P в отличный от P многочлен $yx^2 + xz^2 + zy^2$. Так же, как и выше, устанавливается, что *множество всех подстановок переменных, переводящих данный многочлен P в себя, образует группу*. Эта группа называется *группой симметрии* данного многочлена. В частности, группа симметрии рассмотренного выше многочлена P состоит из подстановок

$$e = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}.$$

Эти подстановки как бы переставляют буквы x, y, z по кругу (циклу) (см. рис. 17). Поэтому группу этих под-

становок называют *циклической группой* подстановок трех элементов (или *циклической группой третьего порядка*). Таблица Кэли этой группы такова:

	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>e</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>a</i>

Вообще, из шести подстановок трех переменных: *e*, *a*, *b* и

$$u = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & z & y \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & y & x \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix}$$

можно образовать шесть различных групп:

$$G = \{e, a, b, u, v, w\}, \quad H = \{e, a, b\}, \quad U = \{e, u\}, \\ V = \{e, v\}, \quad W = \{e, w\} \quad \text{и} \quad E = \{e\}$$

(всюду в фигурных скобках стоят элементы группы). Таким образом, существуют шесть типов симметрии многочленов от трех переменных. При этом типы симметрии, отвечающие группам *U*, *V* и *W*, очевидно, несущественно отличаются друг от друга (они отличаются лишь обозначением переменных *x*, *y*, *z*. Например, обе подстановки группы *U* оставляют неизменной букву *x*, а обе подстановки группы *V* — букву *y*).

Многочлены с группой симметрии *H*, подобные выписанному выше многочлену *P*, называются *циклическими*; многочлены с группой симметрии *G*, например

$$Q(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$$

называются *симметрическими*. Вообще, *симметрическим* многочленом от *n* переменных x_1, \dots, x_n называется такой многочлен от этих переменных, который при любой подстановке переменных переходит в равный ему многочлен.

Простейшими симметрическими многочленами от *x* и *y* являются сумма $\sigma_1 = x + y$ и произведение $\sigma_2 = xy$.

Симметрическими многочленами двух переменных являются и степенные суммы $s_k = x^k + y^k$ ($k=1, 2, 3, \dots$). Простой подсчет показывает, что

$$s_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$

$$s_3 = x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2.$$

В алгебре доказывается, что *любой симметрический многочлен от двух переменных можно выразить в виде многочлена от переменных σ_1 и σ_2* . Иными словами, для любого симметрического многочлена $f(x, y)$ существует такой многочлен $F(\sigma_1, \sigma_2)$, что при замене σ_1 на $x + y$, а σ_2 на xy многочлен $F(\sigma_1, \sigma_2)$ переходит в $f(x, y)$.

Аналогичная теорема верна и для многочленов от большего числа переменных. Например, *любой симметрический многочлен от трех переменных x, y, z является многочленом от переменных*

$$\sigma_1 = x + y + z,$$

$$\sigma_2 = xy + xz + yz,$$

$$\sigma_3 = xyz.$$

Многочлены $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ называют элементарными симметрическими многочленами.

При решении систем уравнений часто удается использовать симметрию составляющих ее уравнений. Решим, например, систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x + xy + y = 2. \end{cases} \quad (3)$$

Поскольку левые части обоих уравнений — симметрические многочлены от x и y , естественно испробовать подстановку $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$. После этой подстановки система (3) примет вид

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - \sigma_2 = 4, \\ \sigma_1 + \sigma_2 = 2. \end{cases} \quad (3a)$$

Отсюда получаем, что $\sigma_1^2 + \sigma_1 = 6$ и поэтому $\sigma_1 = 2$ (и, значит, $\sigma_2 = 0$), или $\sigma_1 = -3$ (и, значит, $\sigma_2 = 5$).

Таким образом, решение системы уравнений (3) свелось к решению совокупности систем уравнений.

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -3, \\ xy = 5. \end{cases}$$

Решая их, находим

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_3 = \frac{-3 + i\sqrt{11}}{2}, \\ y_3 = \frac{-3 - i\sqrt{11}}{2}; \end{cases} \begin{cases} x_4 = \frac{-3 - i\sqrt{11}}{2}, \\ y_4 = \frac{-3 + i\sqrt{11}}{2}. \end{cases}$$

Заметим, что симметричность уравнений системы привела к соответствующей симметрии ее решений: при перестановке x и y решение x_1, y_1 переходит в x_2, y_2 ; x_2, y_2 — в x_1, y_1 ; x_3, y_3 — в x_4, y_4 , а x_4, y_4 — в x_3, y_3 . Иными словами, совокупность решений обладает той же симметрией, что и заданная система уравнений.

Система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12 \end{cases}$$

симметрична не только относительно перестановок переменных, но и относительно изменения их знаков. Ее группа симметрии состоит из четырех преобразований

$$\begin{aligned} e &= \{x \rightarrow x, y \rightarrow y\}, \quad a = \{x \rightarrow y, y \rightarrow x\}, \\ b &= \{x \rightarrow -x, y \rightarrow -y\}, \quad c = \{x \rightarrow y, y \rightarrow -x\}. \end{aligned}$$

Такую же группу симметрии имеет совокупность решений этой системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 3; \end{cases} \begin{cases} x_3 = -3, \\ y_3 = -4; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -4, \\ y_4 = -3. \end{cases}$$

Соображения симметрии используются при решении так называемых *возвратных* уравнений, т. е. уравнений типа

$$a_0 x^n + \dots + a_k x^{n-k} + \dots + a_{n-k} x^k + \dots + a_n = 0, \quad (4)$$

таких, что $a_k = a_{n-k}$ при всех $k=0, 1, \dots, n$. Если, например, $n=2m$ четно и $a_0 \neq 0$, то уравнение (4) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m + \frac{a_{m+1}}{x} + \dots + \\ + \frac{a_{n-1}}{x^{m-1}} + \frac{a_n}{x^m} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Стоящее в левой части равенства (5) алгебраическое выражение переходит в себя при замене переменных $x \rightarrow 1/x$. Но простейшим выражением, сохраняющим свою форму при этом преобразовании, является сумма $x + 1/x$. Поэтому естественно попытаться ввести новое неизвестное $y = x + 1/x$. После этой подстановки приходим к

уравнению степени m относительно y , т. е. степень уравнения понижается вдвое.

При этом множество корней возвратного уравнения также симметрично относительно преобразования $x \rightarrow \frac{1}{x}$: если x_1 корень

этого уравнения, то $\frac{1}{x_1}$ является корнем того же уравнения. Отсюда видно, что использование соображений симметрии зачастую облегчает решение уравнений и систем уравнений. Более подробно об этом можно прочесть в книге [3].

Роль теории групп в алгебре не сводится, разумеется, к указанию тех или иных приемов решения конкретных уравнений. Одной из важнейших задач алгебры XVII—XVIII вв. был поиск общих формул решения для уравнений пятой и высшей степеней (формулы для решения уравнений третьей и четвертой степени были найдены в XVI в.). Исследования Лагранжа, Абеля и других математиков показали, что фундаментальную роль в этом вопросе играет поведение некоторых многочленов от корней уравнения при подстановках этих корней. Например, если x_1, x_2, x_3, x_4 корни уравнения четвертой степени, то при различных подстановках корней выражение $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$ принимает 24 различных значения, в то время как выражение $x_1x_2 + x_3x_4$ принимает лишь три различных значения, а выражение $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$ — только два различных значения.

Оказалось, что возможность или невозможность решения уравнения связана с возможностью или невозможностью составления многочленов от корней уравнения, принимающих достаточно мало значений при подстановках этих корней. Пользуясь такими рассуждениями, норвежский математик Нильс Хенрик Абель (1802—1829, о нем см. [11]) доказал, что *не существует формулы, выражающей корни произвольного уравнения пятой степени через коэффициенты этого уравнения с помощью алгебраических операций и операции извлечения корня*¹.

Еще более сильные результаты получил замечательный французский математик Эварист Галуа² (1811—

¹ В честь Н. Х. Абеля коммутативные группы называют *абелевыми* (см. стр. 131).

² Заметим, что именно Галуа впервые ввел в математику понятие группы.

1832, о нем см. [7]), в возрасте 20 лет погибший на подстроенной полицией дуэли. Галуа связал с каждым уравнением некоторую группу подстановок корней. Эта группа, которую сегодня называют группой Галуа данного уравнения, состоит из подстановок, не меняющих всевозможных соотношений между корнями, которые можно выразить в виде равенства нулю, некоторых многочленов от корней, имеющих рациональные коэффициенты. (Примерами таких соотношений являются соотношения вида $x_h x_{n-k} = 1$ для корней возвратных уравнений). Знание группы Галуа данного уравнения дает очень большую информацию о его свойствах. В частности, Галуа нашел, какой должна быть эта группа, чтобы уравнение решалось в радикалах. Именно с работ Галуа (о которых см. [13]) начался расцвет теории групп.

В данной статье рассмотрены некоторые связи между теорией групп и школьной математикой. Эти связи не исчерпываются затронутыми здесь вопросами. Например, в тригонометрии весьма важную роль играют преобразования, переводящие в себя координатный крест (они, по сути дела, лежат в основе вывода формул приведения); эти преобразования, разумеется, образуют группу. Формулы сложения для тригонометрических функций теснейшим образом связаны с группой поворотов плоскости вокруг начала координат (такой подход к тригонометрии принят, например, в книге [6]).

Теория групп играет в настоящее время весьма важную роль в физике, в первую очередь в квантовой механике и теории элементарных частиц, в химии (в частности, в теории валентности), в кристаллографии и в ряде других естественнонаучных дисциплин. Роль теории групп в квантовой механике настолько велика, что период внедрения в физику квантовомеханических концепций физики старой школы, незнакомые с теорией групп и нежелавшие ей учиться, прозвали «групповой чумой». Замечательным успехом теории групп явилось открытие на основе теоретико-групповых соображений ряда новых элементарных частиц, скажем, так называемого «омега-минус-гиперона». Однако приложения теории групп к физике (кратко о них сказано, например, в ввводной статье к книге [4]) лежат далеко за пределами данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Введение в теорию групп. М., Учпедгиз, 1938.
2. Болтянский В. Г. и Виленкин Н. Я. Симметрия в алгебре. М., «Наука», 1967.
3. Болтянский В. Г. и Яглом И. М. Векторы в курсе геометрии средней школы. М., Учпедгиз, 1962.
4. Вейль Г. Симметрия. М., «Наука», 1968.
5. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М., «Наука», 1969.
6. Виленкин Н. Я., Шварцбурд С. И. Математический анализ. М., «Просвещение», 1969.
7. Инфельд Л. Эварист Галуа — избранник богов. М., «Молодая гвардия», 1965.
8. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М.—Л., ОНТИ, 1936.
9. Клейн Ф. О так называемой неевклидовой геометрии. — В сб.: «Об основаниях геометрии». М., Гостехиздат, 1956, стр. 253—303.
10. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»). — В сб.: «Об основаниях геометрии», стр. 399—434.
11. Оре О. Замечательный математик Нильс Хенрик Абель. М., Физматгиз, 1961.
12. Перепелкин Д. И. Курс элементарной геометрии, чч. 1—2. М.—Л., Гостехиздат, 1948—1949.
13. Постников М. М. Теория Галуа. М., Физматгиз, 1963.
14. Яглом И. М. Геометрические преобразования, тт. I—II. М., Гостехиздат, 1955—1956.
15. Яглом И. М. и Атанасян Л. С. Геометрические преобразования. — В кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. IV. Геометрия. М., Физматгиз, 1963, стр. 49—158.
16. Яглом И. М. и Ашкинзуе В. Г. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, ч. I. М., Учпедгиз, 1962.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В ШКОЛЬНОМ ПРЕПОДАВАНИИ



1. Математическая логика, которая как раздел науки математики имеет лишь столетний возраст, до самого последнего времени занимала внутри математики довольно обособленное место, интересовавшее лишь небольшое число профессиональных математиков. О том же, что какие-то элементы математической логики могут и должны занять место в общеобразовательной средней школе, заговорили только в самые последние годы. Естественно поэтому, что этот вопрос еще мало подготовлен и с чисто теоретической точки зрения: что и как преподавать? и в том, что касается имеющегося опыта, который, насколько известно, невелик.

Вполне понятно, что новизна и неразработанность темы приводят к тому, что среди педагогов и среди ученых по ее поводу высказываются самые различные мнения и на исходный вопрос: *«Нужно или нет вводить элементарные понятия математической логики и теории множеств в школьный курс математики, а если да, то в какой мере?»* даются самые разноречивые ответы. Одно из таких мнений, разумеется, не претендующее на то, чтобы быть абсолютной истиной, приводится в настоящей статье.

Отличие данной статьи состоит в том, что предыдущие трактовали в первую очередь содержание школьного курса математики (анализа и геометрии), эта же тема, по-моему, главным образом относится к форме изложения школьной математики, к вопросу о том, как следует организовать курс школьной

математики для того, чтобы он оказался возможно более эффективным. Думается, что умеренное, но систематическое использование понятий математической логики и теории множеств окажет существенную пользу независимо от того, каково будет в дальнейшем содержание программы школьного курса математики.

Такого мнения придерживаются сейчас многие математики и педагоги ряда школ. Кроме того, как у нас так и за рубежом в течение самых последних лет проводятся соответствующие опыты. В некоторых новых учебниках математики для различных классов как советских, так и зарубежных появляются термины и понятия, заимствованные из математической логики и теории множеств, и есть уже также некоторый небольшой опыт в теоретическом осмыслении этих начинаний (см. работы А. А. Столяра [12—14], в которых собран богатый материал по этим вопросам).

То немногое, о чем будет сообщено в настоящей статье, основывается, с одной стороны, на опыте преподавания моего сотрудника В. А. Вышенского в 8-м классе киевской физико-математической школы-интерната, с другой стороны — на личном многодесятилетнем опыте преподавания математики в университете студентам первых курсов (см. статью [1]). В познаниях, которые абитуриенты вынесли из школы, меня больше всего поражали и огорчали не недочеты, касающиеся тех или иных разделов школьных учебников математики (эти недочеты в большинстве случаев легко и быстро устранимы), а глубокое непонимание большинством учащихся самой сущности математики. Бывшие школьники во многих случаях умеют решать более или менее стандартные задачи, но, как правило, очень плохо отдают себе отчет в том, что они при этом делают. Из-за этого они чувствуют себя совершенно потерянными, как только условия задачи видоизменяются и оказываются в стороне от проторенной дороги.

Огорчает глубокое непонимание того, что представляют собой логические выводы, применяемые в математике, что такое доказательство и какую роль оно играет. Нужно сказать, что как раз подобные дефекты устранимы умелым применением самых первых и элементарных понятий математической логики и теории множеств, доступных даже восприятию учеников со средними ма-

тематическими способностями. В статье будут затронуты следующие три темы: 1) математико-логические принципы решения уравнений и неравенств; 2) понятие логического следования как основа математического доказательства; 3) употребление кванторов в математических формулировках.

Дальнейшая разработка указанных тем представляется важной научно-педагогической задачей. В предлагаемой статье не может быть и речи о том, чтобы обсудить их исчерпывающим образом. Задача статьи намного скромнее — в популярной форме ознакомить, а также постараться убедить педагогов в большой важности этих тем. При этом будем считать, что слушатели в первом приближении знакомы с самыми элементарными теоретико-множественными и математико-логическими понятиями так же как и с соответствующей терминологией и символикой: в крайнем случае об этом можно почитать в одной из доступно написанных книг [3], [4], [6], [7], [11], [12], [16], [17] или [18].

2. Одна из центральных тем школьной математики — *решение уравнений, неравенств, систем уравнений и систем неравенств*. Эта тема занимает обширную часть программы школьного курса алгебры, начинаясь в младших классах и заканчиваясь в последних. И это, конечно, не случайно. Ведь подавляющее большинство применений математики в науке, технике и хозяйстве сводится к составлению уравнений или неравенств, в нахождении их решения, а иногда и в последующем осмысливании найденного решения. Не меньшее значение имеет эта тема и в самой математике как науке.

К преподаванию этой темы в школе можно и нужно подходить одновременно с двух взаимно независимых точек зрения. С одной стороны, следует предельно ясно определить все основные понятия, входящие в постановку задачи, а также выяснить, в чем состоит задача. Это означает, что ученик должен уметь осмысленно ответить на следующие принципиальные вопросы¹:

Что такое уравнение (или неравенство)?

Какова разница между уравнением, равенством и тождеством?

Что такое система уравнений (неравенств)?

¹ Этот список ни в коей мере не претендует на полноту.

Что такое решение уравнения (неравенства, системы уравнений, системы неравенств)?

Что означает, что одно уравнение является следствием другого (аналогичный вопрос ставится также для неравенств и для систем уравнений или неравенств)?

Какие системы уравнений считаются равносильными?

Что означает совместность и несовместность, определенность и неопределенность уравнения или неравенств (или их систем)?

В чем состоит основной принцип нахождения решения уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств)?

С другой стороны, важно, конечно, научить учеников находить решения конкретных уравнений и неравенств. Говоря на современном языке, учеников следует снабдить алгоритмами нахождения решения распространенных простейших частных случаев уравнений, неравенств и их систем, а также выработать соответствующие необходимые навыки.

На мой взгляд, как первая задача — познавательная, так и вторая — более техническая — достаточно важны. Но если можно согласиться, что вторая во многих школах решается хорошо или, во всяком случае, удовлетворительно, то с первой в подавляющем большинстве случаев дело обстоит исключительно плохо. И на вступительных экзаменах в вузы, и при занятиях на первых курсах грубейшие ошибки делаются в очень большом числе случаев в основном потому, что абитуриент или студент просто не отдают себе отчета в том, в чем состоит, собственно, поставленная перед ним задача, что от него требуется. Между тем тот же абитуриент или студент часто вполне в состоянии провести раз навсегда заученную серию операций и в некоторых «нормальных случаях» получить искомое решение (иногда даже не понимая, что оно означает).

Приведем несколько примеров часто встречающихся ошибок, проистекающих из недопонимания существа задачи.

1. Пусть дана система

$$\begin{cases} 3x + 5y = 11, \\ 2x + 9y = 13. \end{cases} \quad (1)$$

Иногда приходится слышать, что $x=2$, $y=1$ — «это два решения системы».

2. Очень распространено непонимание того, что несовместность какой-либо системы уравнений или неравенств совсем не является чем-то «патологическим», указывающим на «неправильность» в формулировке задачи. Глубоко укоренилась мистическая вера в то, что всякая правильно сформулированная задача обязательно должна иметь решение. Аналогично обстоит дело с неопределенными системами, также считающимися «патологическими», редкими и вредными исключениями¹.

3. Неудовлетворительно обстоит дело с пониманием того, откуда возникают «лишние» решения и почему в некоторых случаях нужно после получения решений производить «проверку», подставляя найденные данные в исходную формулу. Распространено глубоко ложное мнение, что это делается только для того, чтобы убедиться, что в ходе вычислений не были допущены ошибки.

4. Ближе к этому также следующее непонятное многим явление: «Как может случиться, что задача, в которой спрашивалось, скажем, о числе рабочих, необходимых для строительства некоторого сооружения, может привести к уравнению, имеющему среди своих решений отрицательные, дробные или даже мнимые числа?».

Такие и ряд других недопониманий приводят к широко распространенным суевериям о природе математики, о ее возможностях и «невозможностях» как инструменте научного познания. А правильное понимание этого глубокого теоретико-познавательного круга вопросов среди работников умственного труда (не математиков), на мой взгляд, намного важнее, чем чисто технические умения и навыки в решении тех или иных задач частного вида.

Понятия, разработанные за последние десятилетия в рамках математической логики и теории множеств, открывают перспективный путь для преодоления возникающих педагогических трудностей. Можно только пожалеть, что этот путь пока что слишком мало исследован. Последнее объясняется тем, что глубокое и правильное понимание основ математической логики распростране-

¹ Не раз приходилось на экзаменах, как вступительных, так и курсовых, слышать даже такое мнение: «Уравнения должны иметь одно решение, а системы неравенств — обязательно бесконечно много решений».

но лишь в узком кругу специалистов этой науки, а они в своих научных побуждениях обыкновенно далеки от забот школьного преподавания математики. Кроме того, усвоение логических понятий детьми встречается, возможно, специфические трудности возрастного¹ порядка, — а эта сторона дела в большинстве случаев находится вне круга интересов профессиональных математиков.

Что касается затронутой темы — «уравнения — неравенства» — то она, бесспорно, лучше всего проясняется на основе понятий *предиката (свойства, отношения)* и *высказывательной формы*. Интуитивные и эвристические предпосылки этих понятий следует, по-видимому, закладывать в достаточно раннем возрасте². Последовательность, в которой следует развивать эти логико-математические и теоретико-множественные понятия, примерно такова: выражения

$$\begin{aligned} 3 + 5 = 8; \quad 3 + 7 = 9; \quad 7 - 2 \cdot 3 = 1; \quad 3 \leq 5; \quad 3 < 5; \\ 8 \cdot 2 > 13; \quad 8 \cdot 2 \geq 17 \end{aligned} \quad (2)$$

— это «высказывания», «утверждения», «осмысленные утверждения»; некоторые из них истинные, другие — ложные. Очень важно закрепить в понимании учащихся то, что осмысленные высказывания могут быть как истинными, так и ложными, для чего необходимо приводить в достаточном количестве примеры ложных высказываний³.

¹ О современных воззрениях и спорах по поводу этапов развития логического мышления у ребенка можно прочесть в трудах известного швейцарского психолога Ж. Пиаже [8, 9].

² Известный бельгийский математик и педагог Ж. Пиаже предлагает начинать соответствующую подготовку в первом классе средней школы или даже в дошкольном возрасте, отрабатывая понятие бинарного отношения на основе представления таких отношений графами. Полученный им богатый экспериментальный материал просуммирован в интересной книге «Ребенок и графы» [20].

³ Считаться с возможностью того, что осмысленные («правильные» по форме) высказывания могут быть ложными по содержанию, важно хотя бы уже потому, что мы можем не знать (или не сразу узнаем), истинно или ложно то или иное высказывание. Например, такие: «Всякое большее двух четное число есть сумма двух простых чисел»; «Существуют разумные существа на планетах вне солнечной системы»; «Число всех простых чисел меньше чем 3000 превосходит 51»; «Не существует таких целых чисел x, y, z и n , что $n > 2$ и $x^n + y^n = z^n$ »; «В 7^а классе школы № 13 г. Киева нет ни

На этом этапе вполне уместно ознакомить учащихся с основными теоретико-высказывательными связками: «и» — *конъюнкция*, «или» — *дизъюнкция*, «не» — *отрицание*, а также, конечно, связка «влечет» — *импликация*. Школьники без особого труда и достаточно быстро понимают смысл и значение этих операций. Известный опыт показывает, что нет необходимости рассматривать эту тему (как, впрочем, и некоторые другие, относящиеся сюда темы) систематически. Полезней, по-видимому, делать это как бы между прочим, вводя в подходящем месте ту или иную связку¹. Целесообразно при этом время от времени вкрапливать примеры и из повседневной жизни; таких примеров особенно много в книгах [2], [4], [6]. Овладение этими понятиями хорошо закрепляется использованием принятых символов, и более того, с некоторого момента следует неукоснительно требовать четкой записи утверждений только с использованием соответствующей символики.

Следующий важнейший этап состоит в выяснении понятия *высказывательной формы*² (или «формы для высказывания») вместе с понятиями *переменной*, *области истинности* (синоним «решения») и *предиката*. К высказывательным формам как раз и относятся уравнения и неравенства, содержащие переменные:

$$3x = 9; 3x + 7y = 17; x - y = 9; x^2 < 9;$$

$$x < y + 1; \begin{cases} 3x + 7y = 17, \\ 6x - 2y = 2. \end{cases}$$

Самый удачный подход к указанным понятиям состоит, видимо, в таком определении понятия «высказывательная форма»: *высказывательная форма — это то, что становится высказыванием, когда вместо переменных подставляются имена определенных объектов, называемых допустимыми значениями переменных* (в случае уравнений и неравенств эти объекты являются чис-

одного отличника» и т. д. А возможность формулировать правильные (по форме) утверждения, «значение истинности» которых нам неизвестно (т. е., быть может, истинные, а может быть и ложные) совершенно необходима, так как она позволяет высказывать те или иные гипотезы, ставить осмысленные вопросы, проблемы и задачи.

¹ Можно указать, например, на то, что знак \leq выражает, по существу, дизъюнкцию: $3 \leq 5$ — это сокращенная запись (истинного) сложного высказывания: « $3 < 5$ или $3 = 5$ ».

² Желательно избегать термина «переменное высказывание».

лами)¹. Но следует уточнять, из какого множества берутся значения переменных. Указание множества допустимых значений переменных — *универсального множества* — входит, по существу, в определение высказывательной формы и умалчивается в практике математики только потому, что оно считается само собой разумеющимся. В большинстве случаев так оно действительно и есть, но зачастую именно эта неточность приводит к недоразумениям.

Так, например, выражение $3x + 15y = 2$ представляет собой два различных уравнения, в зависимости от того, рассматривается ли оно в области целых или в области рациональных чисел. В первом случае его область истинности — пустое множество (уравнение решений не имеет), во втором случае область истинности содержит бесконечно много элементов: все пары чисел вида $\left(k, \frac{2-3k}{15}\right)$, где k — произвольное рациональное число, являются решениями.

Итак, каждому уравнению или неравенству сопоставлено некоторое множество возможных значений входящих в него переменных, называемое *универсальным множеством*. Если в уравнение (или в неравенство) входит несколько, скажем, два (x, y) или три (x, y, z) переменных, то универсальным множеством является декартово произведение (или степень) множеств (множества) значений каждой из переменных (множество пар, троек и т. д.). Подставляя вместо переменных конкретные элементы универсального множества, получаем высказывания — равенства или неравенства, которые могут быть истинными (*и*) или ложными (*л*). Так, первым двум из приведенных выше примеров отвечают «таблицы истинности», помещенные на стр. 155.

Таким образом, уравнения или неравенства, содержащие переменные, определяют *предикат* на соответствующем универсальном множестве: множество значений, для которых высказывание становится истинным, следует называть *множеством истинности* или *множеством решений* соответствующего уравнения или неравенства, а каждый элемент этого множества называется *реше-*

¹ Удобно и хорошо воспринимается учащимися сравнение высказывательной формы и формуляров, в которых нужно заполнить графы. См. [13, 16].

x	$3x = 9$	Значение истинности	x	y	$3x + 7y = 17$	Значение истинности
1	$3 \cdot 1 = 9$	<i>л</i>	1	1	$3 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 17$	<i>л</i>
0	$3 \cdot 0 = 9$	<i>л</i>
...	0	2	$3 \cdot 0 + 7 \cdot 2 = 17$	<i>л</i>
3	$3 \cdot 3 = 9$	<i>и</i>
...	-34	17	$3 \cdot (-34) + 7 \cdot 17 = 17$	<i>и</i>
		
			1	2	$3 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 17$	<i>и</i>

нием. Если множество истинности — пустое множество, то уравнение или неравенство называется *противоречивым*, если множество истинности совпадает со всем универсальным множеством, то тогда имеем дело с *тождеством* (более подробно см. [1] или [13]).

Коль скоро задана система уравнений (или неравенств), то предполагается, что она определяет предикат, являющийся *конъюнкцией* предикатов, определяемых каждым из уравнений (или неравенств), входящих в систему, а область истинности системы является *пересечением* областей истинности соответствующих уравнений. Например, система:

$$\begin{cases} 3x + 7y = 17, \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$$

означает высказывательную форму:

$$(3x + 7y = 17) \wedge (6x - 2y = 2),$$

где \wedge — знак конъюнкции, читающийся как союз «и». Она принимает значение «истинно» только для пары (1, 2) (т. е. для значений $x=1$, $y=2$). Отметим, что намеченная здесь точка зрения позволяет легко и понятно вводить в рассмотрение системы координат и графическое представление уравнений, неравенств и функций, на чем в данной статье останавливаться не будем.

Остановимся теперь на том, как пояснить общую схему нахождения решения¹ уравнений (неравенств или систем). В основу нужно вложить понятие *логического следования* (знак \Rightarrow) и *логической равносильности* (знак \Leftrightarrow). Определение этого понятия таково: утверждение, что предикат (соответственно высказывательная форма) $Q(x)$ *следует* из предиката (высказывательной формы) $P(x)$, т. е.

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

означает, что всякий раз, когда $P(x)$ принимает значение истинности I , также и $Q(x)$ принимает значение I . Другими словами, запись $P(x) \Rightarrow Q(x)$ означает, что множество истинности предиката $Q(x)$ содержит множество истинности предиката $P(x)$. Если множества истинности предикатов совпадают, то говорят, что эти предикаты *равносильны*.

Рассмотрим теперь понятие логического следования — основное понятие математической логики и математики. На этом понятии базируются, в частности, схемы решений математических задач (среди них — задачи на решение уравнений и неравенств), а также все доказательства. Важнейшей педагогической задачей математики является выяснение и закрепление понятия логического следования. Этой теме можно посвятить отдельное исследование, но в рамках данной статьи за неимением места ограничимся указанием на следующие примеры, поясняющие это понятие:

« x есть рыба» \Rightarrow « x есть животное»,

« x есть итальянец» \Rightarrow « x есть европеец».

Теперь рассмотрим примеры из области математики:

« x есть ромб» \Rightarrow « x есть параллелограмм»,

« x есть параллелограмм» \Rightarrow « x есть четырехугольник» и т. д. и т. п.

¹ В этом месте хотелось бы отметить досадную омонимию: слово «решение» имеет в русском языке два различных значения. С одной стороны, «решением» называется всякий элемент области истинности уравнения или неравенства. С другой стороны, «решением» принято называть процесс последовательных преобразований, имеющий своей целью установление «решений» (в первом смысле). В большинстве случаев значение слова легко усматривается из контекста. Но возможны и недоразумения, особенно когда оба понятия присутствуют при изложении одной и той же мысли. В данной статье слово «решение» употребляется лишь в первом смысле, а другое понятие описываем термином «нахождение решения».

Для целых чисел:

« x делится на четыре» \Rightarrow « x делится на два»,
« x больше, чем 5» \Rightarrow « x больше, чем 3» и т. д.

Двуместные предикаты:

« x делит y » \Rightarrow « x делит $2y$ »,

« $x = y$ » \Rightarrow « $x^2 = y^2$ »,

« $x < y$ » \Rightarrow « $x \leq y$ ».

Для действительных чисел:

« $x^3 = y^3$ » \Leftrightarrow « $x = y$ »,

но для комплексных чисел неверно, что

« $x^3 = y^3$ » \Rightarrow « $x = y$ »

и т. д. и т. п.

Важно отметить, что для большинства указанных примеров истинно лишь отношение \Rightarrow , но не отношение \Leftrightarrow . Следует указать учащимся, что $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$ истинное, а $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ ложное утверждение, и остановиться на других подобных случаях. Нужно привести как можно больше примеров логического следования и отработать у учащихся понимание различия между понятиями логического следования и логической равносильности.

Основной принцип решения уравнения, системы уравнений или неравенств состоит в последовательной замене одной системы другой, являющейся ее логическим следствием вплоть до получения явного описания некоторого множества — подмножества универсального, множества, содержащего искомое множество решений. Если в процессе преобразования одна система заменяется не равносильной, а лишь логически следующей из предыдущей, то полученное множество будет, вообще говоря, шире, чем множество всех решений: оно может содержать «лишние элементы».

Пример:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 6x - 2} &= 2x - 1 \\ \Downarrow \\ x^2 + 6x - 2 &= 4x^2 - 4x + 1 \\ \Updownarrow \\ x &= 3\sqrt{x} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

где \vee — символ дизъюнкции, читающийся как союз «или».

Однако решением здесь является только $x=3$.

Во всяком случае, искомые решения находятся среди полученных и могут быть из них отобраны подстановкой в исходное уравнение (неравенство или систему). Если же в процессе решения производятся лишь преобразования с заменой уравнений или неравенств на логически равносильные, то область истинности полученного окончательного выражения должна быть той же самой, как у исходной высказывательной формы, и подстановка в исходное выражение не нужна (либо нужна только для проверки того, что в ходе преобразования не были допущены ошибки).

Приведенные краткие соображения показывают, в какой значительной мере теоретико-логические понятия способны прояснить педагогически трудные положения теории уравнений и неравенств. Однако в какой последовательности и на каком материале их следует развивать в школьном преподавании — это далеко не полностью разработанная задача.

3. Вторая тема, при изложении которой математико-логические понятия особенно необходимы — это *«доказательная математика»*. Дедуктивный характер математических утверждений является характерной чертой математической науки — это то, что отличает ее от наук экспериментальных (физики, химии, биологии) и описательных (географии, зоологии и др.). Истинность математических утверждений (теорем) устанавливается не на основании наблюдений или на анализе результатов опытов, а логически выводится из небольшого числа исходных утверждений (аксиом), истинность которых считается «очевидной» (старая точка зрения) или данной «по определению» (новая точка зрения).

Доказательный характер математики, как основное свойство математической науки, должен быть усвоен каждым, кто изучает математику, независимо от того, посвятит ли он себя в дальнейшем чистой математике, будет ли пользоваться математикой как инструментом исследований в других областях знаний или знакомиться с ней только в общеобразовательных целях как с одним из величайших достижений человеческого гения. Во всех случаях учащийся должен в полной мере отдавать себе отчет в том, что такое доказательство и почему математические утверждения требуют доказательств.

Нужно сказать, что преподаватели математики в средней школе за редкими исключениями с этой педагогической целью не справляются. В университетской практике как при приемных экзаменах, так и при занятиях на первых курсах эти недостатки особенно видны. А ведь здесь речь идет об учащихся, которые выбрали математику своей специальностью, и, естественно, имеют к ней наклонности и способности обычно выше средних. Что же говорить об учащихся, не продолжающих занятий математикой после школы? Они, конечно, никогда уже не поймут, что представляет собой доказательство в математике, и тем самым основные характерные черты математики навсегда останутся вне их понимания. Все те многочисленные часы, которые были потрачены в школе на доказательство геометрических теорем, останутся для них потерянными временем.

Слово «геометрические» было упомянуто не случайно. Действительно, термины «теоремы» и «доказательства» ассоциируются у учащихся исключительно с геометрией, и первокурсники бывают иногда очень удивлены, что теоремы доказываются в алгебре и даже в арифметике. Это, несомненно, следствие огромного влияния «Начал» Евклида — книги, которая на протяжении двух тысячелетий являлась моделью математической строгости и формы дедуктивного построения математической науки, причем по ряду исторических причин эта форма была выработана именно на примере геометрии¹. Испокон веков, вплоть до XX столетия, эта модель формировала школьную математику.

К сожалению, строгая Евклидова геометрия слишком сложна для школьного преподавания, а облегченные «школьные варианты» этой науки во многом создают у учащегося превратное представление о ней. Что же касается собственно логических доказательств, то доказательства эти, в лучшем случае, заучиваются наизусть и воспринимаются учащимися как некоторые заключения, как некоторая словесная магическая формула.

Трудность при геометрических доказательствах состоит еще в том, что в них бывает нелегко отличить соображения, мотивируемые геометрической наглядностью,

¹ Несмотря на то, что «Начала» Евклида трактуют не только геометрию.

от «строго логических» заключений, и недаром даже искусственные геометры веками пользовались при геометрических доказательствах нетривиальными утверждениями, интуитивно ясными, но явно в аксиомах не сформулированными. К числу таких утверждений принадлежит, например, так называемая *аксиома Паша* (см. стр. 42).

Что же нужно требовать от учащихся? Очевидно, что вполне строгие виды и построенные на них доказательства математических утверждений намного проще проводить на примерах арифметики и алгебры¹. Очень хорошо для этого подходит раздел арифметики целых рациональных чисел как учение о делимости (НОД, НОК, разложение чисел на простые множители и т. д.; см. [5]), также восходящее к «Началам» Евклида.

Многие математики и педагоги, например известный французский ученый Ж. Дьедоннэ, считают, что в школьной математике совсем нет необходимости стараться строить обширные теории исходя из небольшого числа аксиом; куда важнее пояснить учащимся сам принцип дедуктивного заключения, указать, что *«одними логическими рассуждениями можно из одних истинных утверждений получить другие»*. Это центральное для математики положение можно и нужно пояснять и закреплять с самого младшего возраста. «Предположим, что в сарае было семь цыплят. Два цыпленка из сарая вышли. Сколько цыплят осталось в сарае?». «Осталось пять». Нужно главным образом закрепить в понимании ребенка, что для получения ответа *нет необходимости заглядывать в сарай*, что ответ можно получить *простым логическим заключением*.

Этот принцип должен сопутствовать всему преподаванию математики с младших классов до самых старших. Простые логические рассуждения следует приводить как в арифметике, так и в алгебре и в геометрии. «Предположим то-то и то-то». «Тогда должно быть это и это». А цепочка таких заключений уже и есть *доказательство*. Естественно, что на каком-то этапе у учащихся возникнет интерес к тому, какие логические заключения «правильны» и почему правильные заключения

¹ Я не хочу этим сказать, что совсем не следует приводить доказательства геометрических теорем, а только то, что «доказательную математику» лучше начинать не с евклидовой геометрии, а с алгебры (ср. [19]).

позволяют из истинных утверждений выводить истинные. Привлечение понятий и символики математической логики уместно именно здесь, поскольку оно позволяет прояснить такие вопросы. Как далеко на этом пути следует идти, пока не совсем ясно, по-видимому, на это должен ответить все более накапливающийся опыт.

А. А. Столяр в школьном математическом кружке провел занятие на тему «Как мы рассуждаем?» и опубликовал изложение этих занятий в брошюре [13]. Это является попыткой переложить элементы теории высказываний на понятный школьникам язык. Неясно, самый ли это правильный путь — я лично в этом сомневаюсь, но считаю, что с этим, как и с рядом других опытов, следует ознакомиться и извлечь из них максимальную пользу.

4. Естественней, на мой взгляд, с самого начала использовать более богатый язык математической логики, чем язык исчисления высказываний, а именно язык *узкого исчисления предикатов*. Это более уместно по многим причинам.

Во-первых, язык предикатов легко объединяется с элементарными теоретико-множественными понятиями, без которых в настоящее время в школьной математике вообще трудно обойтись. Во-вторых, важнейшую роль в языке и в логике математики играет понятие квантора (общности и существования), и большинство логических школьных ошибок проистекает из плохого понимания смысла кванторов и действий над ними, но на уровне исчислений высказываний кванторы, как известно, не появляются.

Уместно развивать в школе более содержательный язык, на котором удобно выражать математические утверждения. Язык исчисления предикатов позволяет удобно записывать большое число утверждений из различных разделов математики: алгебры, арифметики, геометрии, анализа. -

Особенно много пользы приносит этот язык, как показывает опыт, в такой области, как арифметика. При чем учить записывать и читать математические утверждения в логической записи можно постепенно, одновременно с изучением соответствующего раздела курса математики. Обычно ученикам очень нравится логическая запись, и они с большим интересом записывают или рас-

шифровывают утверждения о свойствах НОД или взаимно-простых числах. Так, например, утверждение: «НОД чисел a и b можно выразить как линейную комбинацию этих чисел» можно записать так:

$$\forall (a) \forall (b) \forall (d) [d = \text{НОД}(a, b) \Rightarrow \exists (s) \exists (t) [d = at + bs]],$$

где \forall — квантор общности, который читается «для всех» или «все», а \exists — квантор существования, который читается «есть» или «существует».

Дословно эта запись означает: «Для всех a, b, d , из того, что $d = \text{НОД}(a, b)$, вытекает существование таких (целых!) чисел s и t , что $d = at + bs$ ».

Например, утверждение: «Если a делит bc и a взаимно просто с b , то a делит c » можно записать так:

$$\forall (a) \forall (b) \forall (c) [(a | b \cdot c \wedge \text{НОД}(a, b) = 1) \Rightarrow a | c]$$

или дословно: «Для всех a, b, c из того, что $a | b \cdot c$ и $\text{НОД}(a, b)$ следует, что $a | c$ ». Число таких примеров можно значительно увеличить.

При пользовании таким языком ученики легко схватывают логическую структуру математических утверждений, после чего становится куда проще пояснять понятие логического следования. Насколько при этом следует пользоваться формальным выводом «гильбертовского типа», пока не ясно. Возможно, что для школьной практики следовало бы адаптировать нечто близкое «естественному выводу» Г. Генцена, но так ли это, покажет, видимо, только будущее. Пока же следует приучать учащихся к строгой формулировке математических утверждений: здесь логическая запись очень полезна.

Хочется, наконец, отметить такую важную тему, где употребление логической записи особенно уместно: это формулировка утверждений, в которых встречаются чередующиеся кванторы и особенно построение отрицаний этих утверждений. К таким утверждениям с чередующимися кванторами относятся, в частности, многие определения из начал анализа. Соответствующие понятия зачастую с трудом воспринимаются на первом курсе вуза ввиду их несомненной сложности; сейчас же речь идет о включении элементов анализа в программу средней школы, и с трудностью понимания основных определений сталкиваются и в дальнейшем еще в большей мере будут сталкиваться преподаватели старших классов.

Утверждение, что последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ сходится к числу a , по определению означает: для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для каждого $n > N$ имеет место неравенство $|a - a_n| < \varepsilon$.

Вот еще более сложное определение. Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ сходится означает: существует такое действительное

число a , что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для каждого $n > N$ имеет место неравенство $|a - a_n| < \varepsilon$.

Это формальное и строгое определение нужно и можно пояснить содержательно, что обыкновенно и делается с большим или меньшим успехом. И все-таки для многих учащихся, определенные свойства его до конца не постигаются. Это бывает заметно, если потребовать от учащегося отрицание данного свойства, что бывает нужным для доказательства от противного. Например, как выразить, что последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ не сходится? Обыкновенно достаточно задать такой вопрос, чтобы смутить учащегося.

Между тем легко себе представить — и опыт это подтверждает, — что обычная запись соответствующих определений на языке исчисления предикатов с использованием кванторов, а также правила де Моргана для отрицания кванторов (все это легко и быстро усваивается) во многом снимают вышеотмеченные трудности.

Действительно, запись для свойства сходимости последовательности выглядит так:

$$(a_i)_{i=1, \dots, n, \dots} \overset{\text{опр}}{\text{сходится}} \iff \exists (a) \forall (\varepsilon) \exists (N) \forall (n) [(\varepsilon > 0) \wedge \wedge (n > N) \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon].$$

(Знак $\overset{\text{опр}}{\iff}$ читается: «эквивалентно по определению»). Поэтому отрицание этого утверждения — утверждение о том, что последовательность не сходится — получается заменой кванторов общности на кванторы существования, а кванторов существования на кванторы общности и отрицанием подкванторного выражения (правильно столь же простое, как раскрытие скобок в элементарной алгебре!). Оно запишется так:

$$(a_i)_{i=1, \dots, n, \dots} \overset{\text{опр.}}{\text{не сходится}} \iff \forall (a) \exists (\varepsilon) \forall (N) \exists (n) [(\varepsilon > 0) \wedge \wedge (n > N) \wedge |a - a_n| \geq \varepsilon].$$

Трудновоспринимаемое различие между понятием непрерывности и равномерной непрерывности функций куда легче воспринимается, если для формулировки обоих определений использовать логические записи: функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$

$$\overset{\text{опр}}{\iff} \forall (c) \forall (\varepsilon) \exists (\delta) \forall (x) [(c \in [a, b] \wedge (|x - c| < \delta) \Rightarrow \Rightarrow |f(c) - f(x)| < \varepsilon].$$

Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$

$$\overset{\text{опр}}{\iff} \forall (\varepsilon) \exists (\delta) \forall (c) \forall (x) [(c \in [a, b] \wedge (|x - c| < \delta) \Rightarrow \Rightarrow |f(c) - f(x)| < \varepsilon].$$

В конце хочется еще раз подчеркнуть, что целью статьи не было систематическое освещение всей проблематики, связанной с темой «математическая логика в

школе», для этого тема еще недостаточно созрела. Хотелось лишь отметить важность и своевременность введения некоторых понятий математической логики и теории множеств в школьный курс математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вышенский В. А., Калужнин Л. А. О месте теории множеств и математической логики в преподавании математики в средней школе. — «Математика в школе», 1970, № 1.

2. Гжегорчик А. Популярная логика. М., «Наука», 1965.

3. Калбертсон Дж. Т. Математика и логика цифровых устройств. М., «Просвещение», 1965.

4. Калужнин Л. А. Что такое математическая логика. М., «Наука», 1964.

5. Калужнин Л. А. Основная теорема арифметики. М., «Наука», 1969.

6. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

7. Новиков П. С. Элементы математической логики. М., Физматгиз, 1959.

8. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. М., «Просвещение», 1969.

9. Пиаже Ж., Инельдер Б. Генезис элементарных логических структур. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

10. Слупецкий Е., Борковский Л. Элементы математической логики и теории множеств. М., «Прогресс», 1965.

11. Столл Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М., «Просвещение», 1968.

12. Столяр А. А. Методы обучения математике. М., «Высшая школа», 1966.

13. Столяр А. А. Как мы рассуждаем? Минск, «Нар. асвета», 1968.

14. Столяр А. А. Педагогика математики. Минск, «Вышэйш. школа», 1969.

15. Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. М., Изд-во иностр. лит., 1948.

16. Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика. М., «Мир», 1966.

17. Фрейденваль Х. Язык логики. М., «Наука», 1969.

18. Шиханович Ю. А. Введение в современную математику. М., «Наука», 1965.

19. Яглом И. М. О школьном курсе геометрии. — «Математика в школе», 1968, № 2, стр. 53—58.

20. Frédérique et Páry. L'enfant et les graphes. Bruxelles — Montréal — Paris, 1968.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ И ШКОЛЬНЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ



Основные цели советской средней школы хорошо известны — дать учащимся основы научного мировоззрения, познакомить с основными результатами современной науки и подготовить к самостоятельной трудовой деятельности. Все только что указанные цели столь важны для общества, что они всегда останутся в основе школьного обучения, изменяться же будут содержание, а также методы обучения и воспитания. Эти перемены неизбежны, поскольку со временем изменяются потребности общества, появляются новые профессии и отмирают старые, возрастает объем накопленных научных знаний и на этой базе меняются научные концепции, а также общественное производство. Вместе с этим должны изменяться идеалы школьного образования и его содержания. Вот почему так необходим систематический пересмотр школьных программ и внесение в них обоснованных изменений, а также систематический пересмотр сложившихся традиций в подготовке учителя — основной фигуры успеха школьного обучения.

Учитель является проводником нового в школе, именно он закладывает основы научного мировоззрения и знакомит учащихся с основными методами и концепциями науки, он прививает им привычку к систематическому труду и интересу как к научному познанию, так и к практической деятельности. Вот почему так важно доведения до сведения учителя своевременно и полно все, что представляет интерес для школьного обучения, и в том числе информировать о наметившихся принципиальных тенденциях в науке и практической деятельности.

Лишь подготовив и убедив учителя в важности новых идей и методов, можно создать прочную и широкую базу для реформы школьного обучения во всех его звеньях, а не только в специализированных школах.

Об одной из таких центральных для всей современной науки и для практической деятельности концепций, которая должна найти серьезное отражение в школьном обучении, и будет рассказано в настоящей статье. Речь идет о статистических представлениях, которые в настоящее время стали основными в физике, в связи с бурным проникновением во все ее разделы идей молекулярного и субмолекулярного строения материи. В первой четверти прошлого века статистические методы стали господствующими в теории ошибок измерений, проникли в биологию, теорию стрельбы и были сделаны первые шаги по их использованию в такой важной области практики, как приемочный контроль массовой продукции.

Двадцатый век принес господство статистических концепций во все естествознание, в экономику (начало этого было положено еще К. Марксом), в инженерное дело и в организацию производства. Создалось такое положение, что масса людей, в том числе и далеких от научных исследований, нуждается в элементах статистических знаний, в развитии более широких взглядов на закономерности природы, общественных явлений, технологических процессов, чем те, которые были выработаны человечеством на протяжении тысячелетий и нашли свое яркое воплощение в механистическом детерминизме, господствующем по настоящее время в школьном обучении.

Прекрасно эту методологическую концепцию сформулировал Ф. Энгельс в известном произведении «Диалектика природы»: «...детерминизм, перешедший в естествознание из французского материализма и пытающийся покончить со случайностью тем, что он вообще ее отрицает. Согласно этому воззрению, в природе господствует лишь простая, непосредственная необходимость» ([1], стр. 187).

Очень четко и определенно методологические установки детерминизма в представлениях XVIII и первой четверти XIX в. были сформулированы французским астрономом, математиком и физиком П. Лапласом в

его известном труде «Опыт философии теории вероятностей». Согласно Лапласу, «все явления, даже те, которые по своей незначительности как будто не зависят от великих законов природы, суть следствия столь же неизбежные этих законов, как обращение солнца» ([5], стр. 8). Несколько дальше он продолжает эту же мысль: «Таким образом мы должны рассматривать настоящее состояние вселенной как следствие ее предыдущего состояния и как причину последующего» ([5], стр. 9). Согласно Лапласу, ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы природы и относительное положение всех ее составных частей, в принципе мог бы описать в одной формуле как движение величайших тел Вселенной, так и движения легчайших атомов. Для такого ума не осталось бы ничего недоступного как в прошлом, так и в будущем.

По поводу такого представления о законах природы Ф. Энгельс писал, что «с необходимостью этого рода мы тоже еще не выходим за пределы теологического взгляда на природу... Так называемая необходимость остается пустой фразой, а вместе с этим и случай остается тем, чем он был... такая наука, которая взялась бы проследить случай с этим отдельным стручком в его каузальном сцеплении со все более отдаленными причинами, была бы уже не наукой, а простой игрой; ибо этот самый стручок имеет еще бесчисленные другие индивидуальные свойства, являющиеся случайными: оттенок цвета, толщину и твердость оболочки, величину горошин, не говоря уже об индивидуальных особенностях, доступных только микроскопу. Таким образом, с одним этим стручком нам пришлось бы проследить уже больше каузальных связей, чем сколько их могли бы изучить все ботаники на свете» ([1], стр. 187, 188).

Речь здесь идет о стручке гороха, в котором появилось пять горошин, а не четыре или шесть, и этот факт, согласно мнению примитивных детерминистов, вызван «не подлежащим изменению сцеплением причин и следствий, незабываемой необходимостью, и притом так, что уже газовый шар, из которого произошла солнечная система, был устроен таким образом, что эти события должны были случиться именно так, а не иначе» ([1], стр. 187).

Пройти мимо случайных событий, отмахнуться от

них, считать их не заслуживающими внимания науки нельзя, поскольку они окружают нас и вторгаются в нашу жизнь. Школьник должен получить представление о случайных явлениях на уроках арифметики и физики, ботаники и зоологии, химии и литературы, и это первичное знакомство с миром случайных явлений окажет неоценимую помощь в его последующей жизни, независимо от того, кем он станет — рабочим, инженером, служащим или ученым.

В методологическом отношении пренебрежение изучением случайного прекрасно было раскрыто в следующих словах Ф. Энгельса: представители полного детерминизма «...объявляют необходимое единственно достойным научного интереса, а случайное — безразличным для науки. Это означает следующее: то, что можно подвести под законы, что, следовательно, *знают*, то интересно, а то, чего нельзя подвести под законы, чего, следовательно, не знают, то безразлично, тем можно пренебречь. Но при такой точке зрения прекращается всякая наука, ибо наука должна исследовать как раз то, что мы *не знаем*» ([1], стр. 187).

Теперь наука не говорит о беспричинности случайных явлений, они также имеют свои причины и подчинены особым закономерностям, которые включают в себя в качестве частного случая (точнее предельного случая) закономерности строго детерминированных явлений. Таким образом, человечество пришло к представлениям о более широком понимании закономерности, чем это предлагал детерминизм XVIII и начала XIX вв. Нет нужды повторять, что нельзя держать нашу молодежь в неведении и не сообщать ей основных данных о закономерностях случайных явлений, а также о тех первичных методах их количественного изучения, которые уже разработаны в науке.

Статистические представления в физике стали неизбежными как только молекулярное строение материи завоевало признание. Огромное число частиц, находящихся в непрестанном хаотическом движении, уже не может быть изучено обычными приемами чисто детерминистического анализа хотя бы по причине большого числа этих частиц. Но нам вдобавок неизвестны форма этих частиц и действующие между ними силы. В нашем распоряжении находятся лишь немногие общие сведе-

ния: частиц очень много, и для познания в целом нет нужды знать индивидуальное движение каждой молекулы.

Таким образом, возникает необходимость выявить некоторые общие закономерности хаотического движения огромных масс молекул. На этом пути, используя простейшие соображения теории вероятностей, удалось открыть множество закономерностей, которые создаются в результате массовых явлений, подобных движению и столкновениям огромного числа частиц. Среди найденных закономерностей находятся такие прекрасно знакомые со школьной скамьи законы природы, как законы Паскаля, Бойля—Мариотта, Гей-Люссака и другие. Кроме этого, выяснилось, что эти законы не носят характера абсолютной истины, и что при уменьшении числа частиц, участвующих в хаотическом движении, наблюдаются отклонения от этих законов. При этом методы теории вероятностей позволяют предсказывать, какие отклонения и как часто могут происходить (ср. стр. 190).

В настоящее время статистические концепции стали в физике господствующими, и это вызвано не удобством математического аппарата, не научной модой, а существом дела. Нет возможности в настоящей статье войти во все детали, но одно замечание все же необходимо сделать. Каждый преподаватель физики отдает отчет в том, как усложняется его роль в школе от того, что учащиеся не имеют представлений о случайных явлениях, и он не может изложить хотя бы элементы кинетической теории материи на более серьезном уровне, чем это было уместно во времена Лукреция Кара. Он ощущает серьезный урон также от того, что не может дать хотя бы представление об учете ошибок измерения, с которыми неизбежно сталкивается каждый экспериментатор.

Успех молекулярной физики в XIX и XX вв. связан не с появлением представлений о молекулах (эти представления встречались еще в глубокой древности), а с тем, что стала применяться математическая теория расчета вероятностей различных состояний. Качественные представления о молекулярном строении материи относятся еще ко временам Демокрита. В известном философском произведении древнеримского поэта-философа,

материалиста Тита Лукреция Кара «О природе вещей» имеются яркие описания значения первочастиц для явлений природы. Из этих первочастиц построены все вещи мира, и ими определяются все его явления. Вот как описывает Лукреций Кар явление броуновского движения ([4], стр. 79, 81).

Вот посмотри: всякий раз, когда солнечный свет проникает
В наши жилища и мрак прорезает своими лучами,
Множество маленьких тел в пустоте, ты увидишь, мелькая,
Мечутся взад и вперед в лучистом сиянии света;
Будто бы в вечной борьбе они быются в сраженьях и битвах
В схватки бросаются вдруг по отрядам, не зная покоя,
Или сходясь, или врозь непрерывно опять разлетаясь.
Можешь из этого ты уяснить себе, как неустанно
Первоначала вещей в пустоте необъятной мятутся
Так о великих вещах помогают составить понятие
Малые вещи, пути намечая для их достижения,
Кроме того, потому обратись тебе надо вниманье
На суматоху в телах, мелькающих в солнечном свете,
Что из нее познаешь ты материи также движенья.

Как бы поэтична ни была эта картина броуновского движения, современный школьник должен знать, что математическое описание указанного явления природы (а также других процессов) позволяет сделать следующий более глубокий шаг в изучении законов окружающего нас мира. Но для этого уже недостаточно классических ветвей математики — арифметики, алгебры и геометрии, необходимо знание теории вероятностей — математического метода изучения закономерностей случайных явлений. Современная физика учит нас тому, что все ее законы носят статистический характер. Эта мысль должна быть подчеркнута и разъяснена на уроках физики и химии. Она поможет изложению этих предметов в дальнейшем.

Биологи со времен бельгийского ученого А. Кетле заметили, что разброс размеров органов живых существ одного и того же вида прекрасно укладывается в общие теоретико-вероятностные закономерности. Знаменитые законы австрийского монаха-исследователя Г. Менделя, положившие начало современной генетике, для своего осмысливания и количественного оформления требуют теоретико-вероятностных представлений и, что является самым важным, нуждаются в отказе от классических представлений полного детерминизма. Попытки игнорирования биологами теоретико-вероятностных закономер-

ностей приводили даже в недалеком прошлом к искажению закономерностей природы и к тяжелым последствиям как для развития науки, так и для практической деятельности агрономов, животноводов, лесоводов.

В биологических явлениях постоянно приходится сталкиваться с разбросом свойств, которыми обладают особи одного и того же вида и возраста. Это относится к способностям, если говорить о животных и человеке; приспособляемости к изменению условий жизни; росту, весу, длительности жизни и т. д. Изменение всех этих особенностей нельзя предсказать по отношению к одному отдельному экземпляру, но в то же время оно подчиняется своеобразным общим закономерностям. Известный голландский математик (работающий теперь в Швейцарии) ван дер Варден вспоминает такой случай из детства: «... Однажды, когда я был еще ребенком, мой отец привел меня на край города, где на берегу стояли ивы, и велел мне сорвать наугад сотню ивовых листочков. После отбора листьев с поврежденными кончиками у нас осталось 89 целых листиков. Вернувшись домой, мы расположили их в ряд по росту, как солдат. Затем мой отец через кончики листьев провел кривую и сказал: «Это и есть кривая Кетле. Глядя на нее, ты видишь, что посредственности всегда составляют подавляющее большинство и лишь немногие поднимаются выше или так и остаются внизу» ([2], стр. 84).

Хочется подчеркнуть в приведенной цитате два момента. Во-первых, яркость впечатлений детства. Показ распределения размеров листьев, сопровождаемый словами о широте показанной закономерности, на всю жизнь врезался в память. Возможно, что этот эпизод оказал некоторое влияние и на направление научных интересов ван дер Вардена, систематически интересовавшегося применениями математической статистики к изучению явлений биологии и медицины.

Во-вторых, несколько слов необходимо сказать о том, что «посредственности составляют подавляющее большинство». Эти слова особенно опасны для педагога, где бы он ни работал — в школе, в вузе или же с аспирантами. В человеческом обществе зачастую условия семейные, школьные, окружающей среды, материальные и другие не позволяют проявить способности очень талантливым людям. И в то же время нередки

случаи, когда систематическим воспитанием, тренировкой человек средних способностей поднимается выше среднего уровня, хотя в действительности его талант и не так велик. Стремление молодежи попасть в прославленные научные коллективы объясняется не тем, что туда попадают только лица исключительно высоких способностей, а тем, что общая научная атмосфера, обилие остро поставленных важных научных проблем стимулируют научный рост.

Нет таких весов, которые позволили бы точно измерить умственные способности. Но зато точно известно, что способности можно развить соответствующим воспитанием и погубить отсутствием систематической работы, отказом упорно размышлять над трудными проблемами и нестандартными путями их решения. Упорный труд позволяет человеку средних способностей добиваться выдающихся результатов. И в то же время как часто можно наблюдать, что дети, подававшие большие надежды и обладавшие действительно большими способностями, так ничего и не сделали в жизни, поскольку не научились систематически трудиться.

Со статистическими закономерностями неизбежно приходится считаться в медицинской практике, поскольку индивидуальные особенности как здоровых, так и заболевших оказывают огромное влияние на состояние организма. Известно, что при кардиологическом обследовании, казалось бы, совершенно здоровых людей выявляется большой разброс основных характеристик работы сердца. И ответ даже на такой, казалось бы, простой вопрос: что считать нормальной кардиограммой здорового человека? — далеко не прост. А ответ на этот вопрос исключительно важен хотя бы для ранней диагностики, для своевременного обнаружения начинающегося заболевания.

Проблемы влияния условий работы, питания, спорта и других причин на распространение тех или иных заболеваний являются важнейшими, и они могут и должны изучаться методами математической статистики. Распространение заболеваний в разных климатических зонах в настоящее время вызывает большой интерес врачей, и это естественно. Изучение этого вопроса также требует привлечения средств математической статистики и не только для обработки результатов обследований.

но, что исключительно важно, и для правильной организации обследований.

Одной из задач современной медицины является изучение канцерогенных веществ как источников заболеваемости злокачественными опухолями. Ряд статистических задач, которые при этом возникают, еще требует дальнейшего разрешения. Задачи объективизации диагностики заболеваний, распространения эпидемий, выявления фармакологического действия лекарственных препаратов и хирургических воздействий требуют не только чисто медицинского образования, но и широкого использования идей и средств математической статистики.

Хорошо известно, что современная наука и практика широко используют средства электроники и радиотехники. Достоверность передаваемой и принимаемой информации искажается из-за наличия внешних и внутренних помех, искажение сигналов происходит при распространении через турбулентную среду, из-за технического несовершенства радиоэлектронных устройств. Все указанные воздействия носят случайный характер. Их изучение с целью разработки мер для уменьшения влияния искажающих факторов привело к необходимости широкого привлечения в современную радиоэлектронику идей и методов теории вероятностей. В результате этого процесса появилось большое научное направление, получившее наименование статистической радиотехники.

Все то, что было сказано относительно статистической радиотехники, можно отнести и к другим направлениям технической мысли. В строительной механике приходится сталкиваться с необходимостью учета ветровых нагрузок, нагрузок от осадков (в частности, от льда и снега), влияния подпочвенных вод и т. д. Все эти влияния носят случайный характер. При оценке стока рек, необходимой для расчета гидротехнических сооружений (плотин, каналов и т. д.), приходится также считаться с неравномерностью выпадения осадков, таяния, пористости среды и т. д. При дорожном строительстве требуется учитывать потоки транспорта, возможные пассажиро- и грузопотоки и заранее предусматривать места, где имеется повышенная вероятность скопления транспортных средств (перекрестки, мосты, переезды и т. д.). При расчете пропускной способности дорожных сооружений обязательно нужно учитывать слу-

чайную неравномерность потоков движущегося транспорта.

Среди проблем, выдвигаемых современной научно-технической революцией, вряд ли можно указать такую же многостороннюю и фундаментальную, как проблема повышения качества продукции и в первую очередь ее надежности. Нельзя указать ни одной области народного хозяйства, а также научных исследований, связанных с экспериментом, в которой прогресс и возможности использования не ограничивались бы надежностью технических устройств. Причины этого кроются в том, что от бесперебойной работы технических систем в течение заранее заданного промежутка времени зависит как сохранение и производство огромных материальных ценностей, так зачастую и жизнь людей.

Отказ двигателей самолета или системы герметизации кабины (а также других его узлов) может привести в полете к катастрофическим последствиям. Точно так же от управляющего устройства на химическом предприятии (которые в наши дни обладают, как правило, очень высокой степенью автоматизации) в огромной мере зависит правильность протекания технологического процесса. Нарушение же нормального ритма протекания реакций может привести к образованию повышенных давлений, агрессивных сред, повышенным температурам и множеству неприятных последствий, способных вызвать аварийную обстановку. Без надежных систем управления вообще экономически нецелесообразно ставить вопрос о комплексной автоматизации производства.

Поскольку в природе не существует абсолютно однородных и неизменяющихся с течением времени материалов, а также абсолютно постоянных нагрузок, которым будут подвержены устройства в процессе эксплуатации, не может быть и абсолютно надежных изделий. Молекулярная природа материи приводит к случайному разбросу ее свойств, и при расчете надежности совершенно необходимо считаться со случайным разбросом параметров, характеризующих качество деталей, изготовленных из, казалось бы, тождественных партий полуфабрикатов. Несомненно, что на разброс характеристик надежности изделий большое влияние оказывают несовершенство производственного процесса при изготовлении, а также неизбежные отклонения режимов

при эксплуатации. Но, как ни важны эти причины, нельзя забывать и о первой причине, связанной с самой природой вещей, с их молекулярным и субмолекулярным строением. Вот почему одной из центральных задач теории надежности следует считать изучение тех физических и химических процессов, которые происходят в материалах в процессе хранения и обработки, а также в самих изделиях в процессе работы, хранения, транспортировки и др. Все это приводит к изменению характеристик изделия (к ослаблению или упрочнению материалов, их старению, локальным изменениям геометрической формы и т. д.) и в конечном счете к отказам изделий.

Естественно, что для теории надежности очень важны количественные модели этих физико-химических процессов, поскольку, имея их теорию, можно на этой базе решать такие важные задачи, как прогнозирование отказов, выбор оптимальных схем, разработка методов ускоренных испытаний и т. д. При построении этих моделей само существо дела неизбежно заставляет науку и практику учитывать случайный характер тех явлений, с которыми приходится сталкиваться. Отсюда неизбежен вывод, что теория вероятностей и математическая статистика приобретают роль основных математических средств теории надежности и ее практического использования.

Для теории надежности центральным вопросом следует считать также разработку методов теории и практики испытаний. Возникающие здесь задачи очень разнообразны. Первая и, пожалуй, наименее разработанная здесь проблема заключается в испытании опытных образцов. Конструкция еще только создается, в нашем распоряжении еще нет ни большого числа изготовленных экземпляров, ни, тем более, опыта ее эксплуатации. Случается, что в распоряжении исследователей имеются всего два-три образца со всеми их индивидуальными особенностями (тщательность изготовления деталей, случайные промахи, ручная подгонка и т. д.). От получения объективных данных о качестве конструкции, т. е. о целесообразности выдачи ей путевки в жизнь, зависит как будущее техники, так и труд эксплуатационников. Неудачный план первых испытаний может как погу-

бить прогрессивную техническую идею, так и открыть дорогу неудачной конструкции.

Вторая задача теории испытаний связана с процессом проверки качества изготовления серийной продукции. Сколько изделий следует испытывать и в течение какого времени? Как проводить обработку полученных статистических сведений? Возникает множество важнейших вопросов, на которые невозможно ответить без широкого использования и развития идей и методов математической статистики. Но ведь с подобным положением приходится иметь дело в любой экспериментальной науке, всегда, когда нужно рационально использовать данные опыта.

С последней группой вопросов тесно связаны задачи организации технологического процесса по изготовлению однородной продукции высокого качества. Здесь приходится рассматривать два направления исследований. Во-первых, разработка методов приемочного контроля. Продукция уже изготовлена и требуется указать план приемочных испытаний, позволяющий судить о всей партии и учитывающий экономические интересы общества. Это весьма ответственный этап работы предприятия, поскольку забракованная партия приносит значительный ущерб предприятию, а принятая партия изделий пониженного качества вызывает огромные потери в период эксплуатации. Изготовление продукции невысокого качества, возможно, на некоторый период позволяет предприятию успешно рапортовать об успехах, но рано или поздно оно потерпит крах, поскольку его продукция перестанет пользоваться спросом. Полезно заметить, что зачастую расходы на поддержание изделий в рабочем состоянии на протяжении срока эксплуатации требуют затрат, которые в десятки раз превосходят вложения на изготовление нового изделия.

Вторая задача состоит в управлении технологическим процессом и заключается в следующем. Пусть в некоторый момент технологический процесс налажен и выпускаемая продукция обладает должным качеством. Хорошо известно, что с течением времени происходит разладка оборудования, некоторые незаметные изменения условий работы могут изменить качество изготовления. Для того чтобы своевременно заметить эти изменения, время от времени проверяется качество неболь-

шой части продукции, изготавливаемой в данный момент, и по этим наблюдениям принимают решение о продолжении производственного процесса или же его остановке для подналадки. Такое управление качеством получило название статистического метода текущего контроля. Что значат для производства и для экономики страны эти методы, прекрасно характеризует приводимая ниже цитата из экспериментального учебника по теории вероятностей и математической статистике для средних школ США, вышедшего в свет в 1959 г.: «Применение этой области (статистических методов контроля качества продукции. — Б. Г.) было настолько важным в течение второй мировой войны, что департамент производственных исследований и Управление развития военного производства организовывало 33 раза курсы по статистическим методам контроля на протяжении с 1943 по 1945 год. Свыше восьмисот организаций из 35 различных штатов присылали своих представителей для обучения на этих курсах...

Профессор Х. А. Фримэн из Массачусетского технологического института в 1957 году оценивал, что статистический контроль качества спасал американской промышленности по меньшей мере 4 миллиарда долларов ежегодно» ([8], стр. 107).

Приведенные цифры представляются убедительными и хорошо характеризуют важность статистических методов для всех сторон жизни общества: они обуславливают необходимость включения элементов статистического образования в школьный курс математики.

Обзор места статистических методов в современной жизни был бы неполон без упоминания о гуманитарных науках. Статистические методы уже давно используются в археологии и в языкознании. Достаточно вспомнить историю с расшифровкой древнеегипетского иероглифического письма, а также вавилонских клинописных рукописей, чтобы убедиться в том, что даже первичные статистические закономерности расположения знаков позволили сделать открытия первостепенного научного значения. В наши дни в связи с вопросами автоматического перевода с одного языка на другой статистика языка приобретает особое значение. Эти же методы широко используются для расшифровки зашифрованных текстов.

Проблемы кодирования в настоящее время приобрели огромное значение как в связи с огромным ростом обмена информацией, так и в связи с автоматизацией управления. Выработка рациональных языков для этого представляет не только практический, но и научный интерес. Например, выяснение частоты появления звуков в устной и письменной речи позволяет ставить вопрос об оптимальном кодировании букв данного языка для передачи сообщений. Сейчас установлено, что отсутствие в свое время такого рода исследований привело к тому, что телеграфная азбука Морзе процентов на 10—12 хуже оптимально возможной. Частота использования букв определяет рациональное наполнение наборной типографской кассы. Статистическими закономерностями языка определяется расположение букв на каретке пишущей машинки. Редко употребляемые буквы расположены по краям каретки, чтобы на них работали слабые пальцы. Расположение соседних букв не в алфавитном порядке учитывает наиболее вероятные сочетания, встречающиеся в речи.

Известны интересные статистические исследования, связанные с особенностями языка отдельных писателей. Оказывается, статистический стиль речи писателя очень устойчив и эти методы к настоящему времени позволили в некоторых случаях установить литературные подделки, а также истинных авторов безымянных произведений. Развилось новое направление научных исследований — математическая лингвистика, в значительной мере использующая методы математической статистики и теории вероятностей.

Статистические методы в экономике и организации производства заслуживают специального обсуждения и в настоящей статье не рассматриваются. Несколько слов о роли статистических методов в педагогике и педагогических исследованиях. Хорошо известно, что опытные педагоги любое свое предложение, которое они желают сделать общественным достоянием, первоначально проверяют длительное время на опыте личного преподавания. И это правильно, поскольку педагогические решения оставляют след в душе всех членов общества особенно долго. Собственно привычка к работе, интересы к определенным областям знания в значительной степени закладываются в школьные годы.

Теперь, когда так неизмеримо возрос объем той информации, которую нужно сообщить школьнику, особенно остро стоит вопрос о рационализации системы обучения, включая сюда не только программу обучения, но и связи между предметами школьного курса, а также методику изложения. Выработка рациональной системы обучения, учитывающей исключительную изменчивость физических, психических и иных особенностей учащихся и преподавателей, требует использования соответствующих средств исследования. Совершенно ясно, что теория вероятностей и математическая статистика должны быть среди основных математических средств педагогического исследования. Особенно существенны они при организации, проведении и обработке результатов педагогического эксперимента.

По моему глубокому убеждению, ни в одной области деятельности и науки, кроме, быть может, медицины, нет таких сложностей при организации и проведении эксперимента, как в педагогике. В этих экспериментах существенную роль играют психологические особенности испытуемых (школьников) и испытывающих (преподавателей, исследователей), постоянная изменчивость объекта исследования даже на протяжении очень короткого периода. И одновременно нигде так мало не занимаются теорией эксперимента, как в педагогике. Для педагога знание основ математической статистики должно быть обязательным. Но в то же время он не знакомится с математической статистикой ни в школе, ни в педагогическом институте, ни даже в аспирантуре.

Статистические концепции и закономерности необходимы в наши дни не каким-то исключительным специалистам, а буквально всем — рабочему и врачу, инженеру и учителю, экономисту и военному, биологу и агроному, строителю и организатору производства. Вот почему именно в школе должны закладываться элементы этих знаний, когда ум подвижен и идеи, сообщенные в эту пору, становятся рабочим инструментом на всю жизнь.

Что же нужно делать, чтобы практически и методологически важные знания были приняты на вооружение нашей молодежи? На мой взгляд, для этого необходимо не введение в программу школы нового курса, а рациональное размещение необходимых сведений в уже имеющихся предметах. Посильное участие в этом долж-

ны играть и математика, и физика, и химия, и биология. Восприятие новых идей, означающих перестройку взглядов на природу и на управляющие ее явлениями законы, требует длительного времени и поэтому изложение этих концепций должно происходить постепенно на протяжении нескольких лет обучения.

В 6-м классе можно дать общее представление о случайных явлениях, а также научиться строить гистограммы распределений. В 7-м классе доступно пониманию представление о среднем и дисперсии, как мере разброса. В 8-м классе следует изложить первое представление о вероятности случайного события и простейших теоремах о вероятности. В 9-м классе нужно изложение комбинаторики, вычисление на этой базе вероятностей случайных событий и ознакомление с задачами статистического контроля качества. Учащихся 10-го класса надо знакомить с понятием случайной величины, теоремами о математических ожиданиях и дисперсиях и с законом больших чисел в формулировках швейцарского математика Я. Бернулли и русского математика и механика П. Л. Чебышева. Естественно, что в этом классе должны быть рассмотрены также генетические задачи, увязанные с курсом биологии.

Понятно, что в такой небольшой статье можно было дать только эскиз статистического образования, который требует дальнейшей разработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Энгельс Ф. Диалектика природы. М., Политиздат, 1969.
2. Варден Б. Л. ван дер. Математическая статистика. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Гнеденко Б. В. и Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. М., «Наука», 1964.
4. Лукреций. О природе вещей, т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1946.
5. Лаплас П. С. Опыт философии теории вероятностей. М., 1908.
6. Реньи А. А. Письма о вероятности. М., «Мир», 1970.
7. Яглом А. М. и Яглом И. М. Вероятность и информация. М., Физматгиз, 1960.
8. Introductory Probability and Statistical Inference (An Experimental Course). New York, 1959.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И КОМБИНАТОРИКУ



§ 1. ПЕРЕСТАНОВКИ

Две буквы А и Б можно расположить одну за другой двумя способами:

АБ, БА.

Три буквы А, Б и В можно расположить в виде последовательности уже шестью способами:

АВВ, АВБ,

БАВ, БВА,

ВАБ, ВБА.

Для четырех букв получим 24 разных способа их расположения в виде последовательности:

АВВГ, АВГВ, БАВГ, БАГВ,

АВБГ, АВГБ, БВАГ, БВГА,

АГБВ, АГВБ, БГАВ, БГВА,

ВАБГ, ВАГБ, ГАБВ, ГАВБ,

ВБАГ, ВБГА, ГБАВ, ГБВА,

ВГАБ, ВГБА, ГВАБ, ГВБА.

Сколькими способами можно расположить в последовательность десять букв? Перебрать все способы расположения здесь было бы трудно. Для ответа на вопрос желательно общее правило, формула, которая позволяла бы сразу вычислить число способов расположения в виде последовательности букв. Число этих способов обозначают $n!$ (n с восклицательным знаком) и называют « n факториал». Мы уже видели, что

$$2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24,$$

Каждый способ расположения данного числа букв в последовательность называется *перестановкой*. Очевидно, что вместо букв можно взять цифры или любые другие предметы. Число перестановок четырех предметов равно $4! = 24$. Вообще $n!$ есть число перестановок n предметов. Заметим еще, что полагают

$$1! = 1$$

(один предмет не с чем «переставлять», из одного предмета можно сформировать только одну «последовательность», в которой этот предмет стоит на первом месте).

$$\begin{aligned} 1! &= 1, \\ 2! &= 1 \cdot 2 = 2, \\ 3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \\ 4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24. \end{aligned}$$

Напрашивается гипотеза: *число перестановок n предметов равно произведению первых n натуральных чисел:*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n. \quad (1)$$

Гипотеза эта верна.

Для доказательства заметим, что в случае n предметов на первое место можно поставить любой из n предметов. В каждом из этих n случаев остающиеся $n-1$ предметов можно расположить $(n-1)!$ способами. Поэтому получим всего $(n-1)!n$ способов расположения предметов:

$$n! = (n-1)!n. \quad (2)$$

При помощи формулы (2) и получаем последовательно:

$$\begin{aligned} 2! &= 1! \cdot 2 = 1 \cdot 2, \\ 3! &= 2! \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3, \\ 4! &= 3! \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \\ 5! &= 4! \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Знакомые с принципом *математической индукции* могут заметить, что вывод формулы (1) из формулы (2) использует этот принцип, и провести строго формальное рассуждение.

Теперь уже нетрудно вычислить число перестановок десяти букв:

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800.$$

§ 2. ВЕРОЯТНОСТЬ

Семь букв разрезной азбуки А, А, Б, Б, К, У, Ш положены в мешок, откуда их вынимают наудачу и располагают одна за другой в порядке, в котором они появляются. В результате получается слово БАБУШКА.

В какой мере такой факт надо считать удивительным, быть может, заставляющим предполагать, что мы присутствуем при нарочно подстроенном фокусе? Занулируем наши семь карточек с буквами:

1	2	3	4	5	6	7
А	А	Б	Б	К	У	Ш

Их можно расположить по порядку

$$7! = 5040$$

способами. Из этих 5040 случаев слово БАБУШКА получится *в четырех*:

3	1	4	6	7	5	2	4	1	3	6	7	5	2
Б	А	Б	У	Ш	К	А	Б	А	Б	У	Ш	К	А
3	2	4	6	7	5	1	4	2	3	6	7	5	1
Б	А	Б	У	Ш	К	А	Б	А	Б	У	Ш	К	А

Говорят, что из общего числа случаев (5040) четыре случая *благоприятствуют* появлению занимающего нас *события* (закключающегося в том, что из вынутых букв сложилось слово БАБУШКА). *Отношение числа благоприятствующих случаев к общему числу случаев* в подобных задачах называют *вероятностью* события. В нашем случае вероятность появления слова БАБУШКА есть

$$P = \frac{4}{5040} = \frac{1}{1260}.$$

Вероятность эта очень мала, и наше событие действительно очень «маловероятно». Позднее мы узнаем, что подсчитанная нами вероятность имеет такой практический смысл: если много раз производить описанный опыт с буквами, то примерно один раз на 1260 испытаний произойдет наше событие (само собою сложится слово БАБУШКА).

Аналогичный расчет для четырех букв А, А, М, М приводит к результату, что из них случайно будет складываться слово МАМА с вероятностью

$$\frac{4}{4!} = \frac{1}{6}.$$

С такой же вероятностью $1/6$ будет получаться еще каждое из пяти «слов»:

ААММ, АМАМ, АММА, МААМ, ММАА.

§ 3. РАВНОВОЗМОЖНЫЕ СЛУЧАИ

Игральная кость — это кубик, на гранях которого обозначено число очков от 1 до 6. Выбросив две кости, можно получить сумму очков (на верхних гранях двух костей) от 2 до 12. Можно было бы думать, что в задаче имеется 11 возможных случаев и вероятность появления каждого из них равна $1/11$. Но это не так. Опыт показывает, что, например, сумма 7 появляется много чаще, чем сумма 12. Это и понятно, так как 12 можно получить только в виде

$$6+6=12,$$

а 7 многими способами:

$$1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1=7.$$

При этом мы записываем первым слагаемым число очков на первой кости, а вторым — на второй. Поэтому записи $1+6$ и $6+1$ указывают на две различные возможности получения суммы 7.

В основу подсчета вероятностей здесь приходится положить рассмотрение тридцати шести случаев, каждый из которых характеризуется определенным числом очков, выпавших на первой кости, и определенным числом очков, выпавших на второй кости:

1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6
2,1 2,2 2,3 2,4 2,5 2,6
3,1 ...
4,1 ...
5,1 ...
6,1 ...

Представляется естественным считать эти 36 случаев *равновозможными*. Опыт показывает, что в случае достаточно правильных кубических костей, сделанных из

однородного материала, и надлежащих приемов бросания (например, после встряхивания в стаканчике) эти 36 случаев появляются при большом числе повторений примерно одинаково часто.

Для суммы очков на двух костях получаем такие результаты (проверьте):

Сумма	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число благоприятствующих случаев	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Вероятность	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

Уточнение: *вероятностью* называется отношение числа благоприятствующих случаев к общему числу равновозможных.

Какие случаи можно считать равновозможными, на этот вопрос математика не дает ответа. В случае бросания костей физически существенные условия падения кости любой из шести граней кверху представляются нам одинаковыми. Кроме того, представляется естественным считать, что различные комбинации верхних граней двух костей тоже одинаково правдоподобны. Опыт подтверждает эти предположения.

Но разделение всех возможных исходов испытания на исключающие друг друга равновозможные случаи достаточно деликатно. Часто же вместо изложенного сейчас «классического» определения вероятности приходится прибегать к другому — «статистическому». Но на первых порах знакомства с теорией вероятностей разумно отнестись с доверием к «классическому» определению. С точки зрения чистой математики тут нет никакой «нестрогости». Математическая теория вероятностей занимается только вычислением вероятностей различных событий (например, выпадения на двух костях суммы очков 7) при определенных *допущениях*. В занимающих нас задачах это допущения о том, какие случаи надо считать равновозможными.

§ 4. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ И ЗАДАЧА О БЛУЖДАНИИ ПО ПЛОСКОСТИ

Вычислять вероятности приходится отнюдь не только при решении шуточных задач или задач об игре в кости и т. д. В частности, на теории вероятностей основаны кинематическая теория газов, теория диффузии растворенных в жидкости веществ и взвешенных частиц. Она объясняет, почему хаотическое, беспорядочное движение отдельных молекул приводит к четким, простым закономерностям движения их больших совокупностей.

Первая возможность экспериментального исследования такого рода соотношений между беспорядочным движением отдельных частиц и закономерным движением их больших совокупностей появилась, когда в 1827 г. ботаник Р. Броун открыл явление, которое по его имени названо броуновским движением. Броун наблюдал под микроскопом взвешенную в воде цветочную пыльцу. К своему удивлению, он обнаружил, что взвешенные в воде частицы пыльцы находятся в непрерывном беспорядочном движении, которое не удастся прекратить при самом тщательном старании устранить какие-либо внешние воздействия, способные это движение поддерживать (например, вызвать движение самой воды под влиянием неравномерности температуры и т. п.). Вскоре было обнаружено, что это общее свойство любых достаточно мелких частиц, взвешенных в жидкости. Его интенсивность зависит только от температуры и вязкости

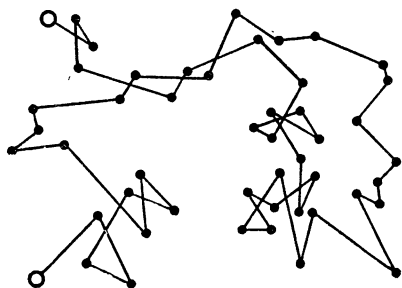


Рис. 1

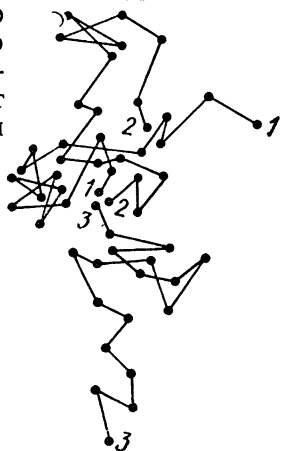


Рис. 2

жидкости и от размеров частиц (движение тем интенсивнее, чем температура выше, вязкость меньше, а частицы мельче). Каждая частица движется по своей собственной траектории, не похожей на траектории соседних частиц, так что близкие вначале частицы очень быстро становятся удаленными (хотя могут иногда случайно вновь встретиться).

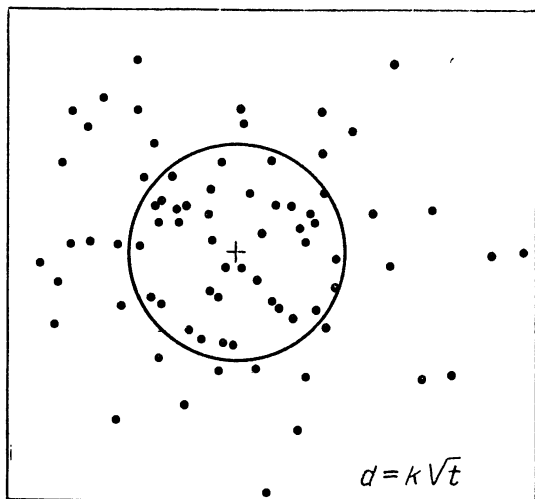


Рис. 3

На рис. 1 точками отмечены последовательные положения частицы (гуммигута в воде по классическим опытам Перрена) с промежутками в 30 сек. Эти последовательные положения соединены прямолинейными отрезками. В действительности траектория частицы еще запутаннее. На рис. 2 схематически показано, что траектории частиц, которые в начальный момент, были очень близки друг к другу, совершенно различны.

Броуновское движение большого числа частиц можно наблюдать, выпустив в тонкий слой воды на плоском стеклышке каплю чернил. При наблюдении простым глазом траектории отдельных частиц увидеть нельзя. Чернильное пятно будет постепенно расплываться, сохраняя округлую форму. Его окраска будет ослабевать. Схематически расположение большого числа частиц,

подверженных броуновскому движению, через некоторый промежуток времени после того, как они все вышли из ближайшей окрестности начальной точки, отмеченной крестиком, изображено на рис. 3.

Обозначим через t промежуток времени, прошедший от выхода наших частиц из начальной точки, и через d — диаметр окружности с центром в начальной точке, внутри которой находится половина частиц (см. рис. 3). Наблюдение показывает, что этот диаметр растет приблизительно пропорционально квадратному корню из промежутка времени t , т. е. изменяется примерно по закону

$$d = k \sqrt{t}. \quad (3)$$

Эта закономерность может быть обоснована теоретически средствами теории вероятностей. Сам ее вывод остается за пределами нашего курса, но в причинах того, что диаметр растет не пропорционально времени (как было бы, если бы частицы разбегались из начальной точки с постоянной скоростью, не меняя направления), а несравненно медленнее, мы вскоре сможем разобратся.

Основные черты броуновского движения частицы можно наблюдать уже на упрощенной модели блуждания частицы по плоскости, разделенной на квадратики. К таким упрощенным моделям при изучении более сложных явлений прибегают и в серьезных научных исследованиях. Будем считать, что наша частица перемещается отдельными шагами и за один шаг переходит из квадрата, в котором она находится в начале шага, в один из четырех соседних квадратиков. Ее путь за восемь шагов может, например, иметь такой вид, как указано на рис. 4.

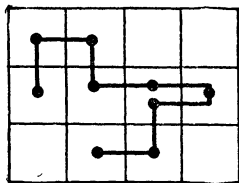


Рис. 4

Из начального положения (рис. 5,а) частица может попасть в один из четырех смежных квадратиков, в каждый одним-единственным способом (рис. 5,б). За два шага частица может попасть в начальное положение *четырьмя* способами (выходя в сторону в одном из четырех возможных направлений и возвращаясь обратно), еще в четыре клетки частица может попасть *двумя*

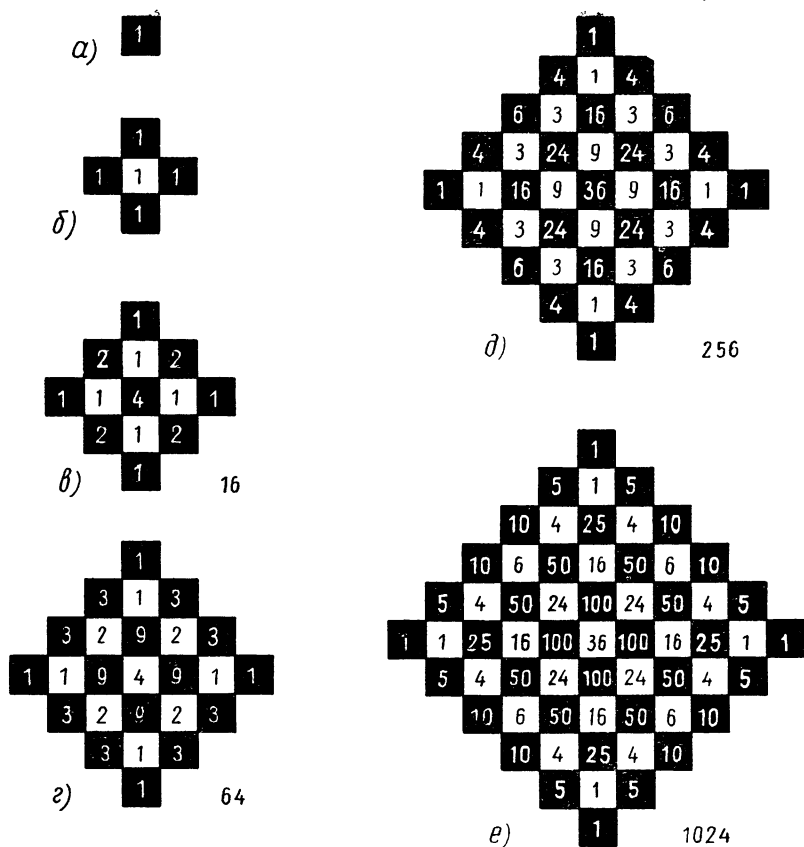


Рис. 5

способами в каждую и в четыре — *одним* способом в каждую (рис. 5,в). Всего частица может двигаться в течение первых двух шагов *шестнадцатью* различными способами.

На рис. 5,г указан результат аналогичного подсчета для трех шагов. Здесь число различных путей равно уже $4 \cdot 9 + 8 \cdot 3 + 4 = 64$.

На рис. 5,д и 5,е указано число способов попадания в различные клетки после четырех и после пяти шагов.

Легко понять, что число различных путей с ростом числа шагов t растет как 4^t :

Число шагов	0	1	2	3	4	5
Число путей	1	4	16	64	256	1024

Если считать, что частица всегда помещается в центре занимаемого ею квадратика, то за t шагов она может удалиться от начального положения не более чем на расстояние th , где h — длина стороны квадратиков. Но для этого она должна двигаться прямолинейно. При $t=5$ это будет только в четырех случаях из 1024. В большинстве же случаев частица окажется в конце пути значительно ближе к своему начальному положению. Например, при $t=5$ в 400 случаях (почти 40%) из 1024 расстояние конечного положения от начального будет равно единице, а еще в 400 случаях это расстояние равно

$$\sqrt{3} = 1,73...$$

Лишь в остающихся немногих более чем 20% случаев частица уйдет дальше.

Допустим теперь, что при любом t все возможные пути нашей частицы *равновозможны*. Тогда числа, представленные на рис. 5, после их деления на 4^t дадут *вероятности* попадания в соответствующие клетки после t шагов. Обозначив через r расстояние от начального положения, получим при $t=2$ такую табличку

r^2	0	2	4
r	0	$\sqrt{2}$	2
Число случаев	4	8	4
Вероятность	1/4	1/2	1/4

При $t=5$ табличка приобретает следующий вид:

r^2	1	5	9	13	17	25
r	1	$\sqrt{5}$	3	$\sqrt{13}$	$\sqrt{17}$	5
Число случаев	400	400	100	80	40	4
Вероятность	$\frac{400}{1024}$	$\frac{400}{1024}$	$\frac{100}{1024}$	$\frac{80}{1024}$	$\frac{40}{1024}$	$\frac{4}{1024}$

Интересно подсчитать *среднее значение квадрата расстояния* (черта в статистике — знак осреднения):

$$\text{при } t=2 \quad \overline{r^2} = \frac{8 \cdot 2 + 4 \cdot 4}{16} = 2,$$

$$\text{при } t=5 \quad \overline{r^2} = 5.$$

Можно доказать, что при любом t в нашей задаче $\overline{r^2} = t$. Корень квадратный из среднего значения квадрата называется в статистике *средним квадратическим*. Оно в нашей задаче равно \sqrt{t} .

На этом пока мы закончим исследование нашей задачи. Заметим только, что рис. 5,е уже обнаруживает большое сходство с рис. 3. Как уже говорилось, при большом числе испытаний частота появления какого-либо исхода примерно пропорциональна вероятности (здесь надо было бы сказать: при большом числе *независимых* испытаний; с точным смыслом выражения «независимые испытания» вы познакомитесь позднее). Оказывается, что наша модель случайного блуждания отдельной частицы хорошо соответствует наблюдениям, если предположить, что частицы блуждают независимо друг от друга.

§ 5. БЛУЖДЕНИЕ ПО ПРЯМОЙ. ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

Рассмотрим еще более простую задачу блуждания по прямой. За один шаг частица продвинется на расстояние h вверх либо на то же расстояние

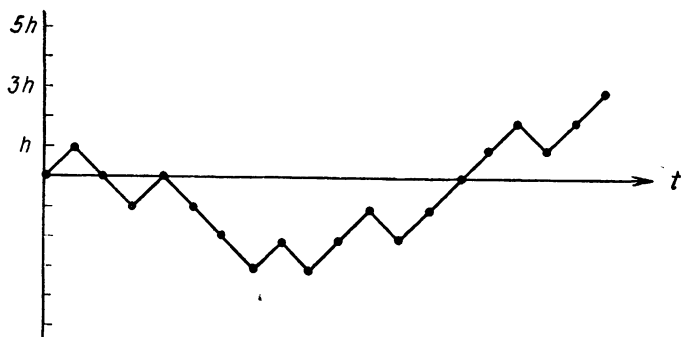


Рис. -6

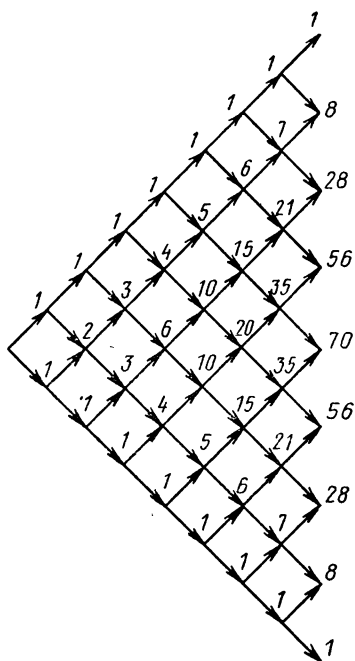


Рис. 7

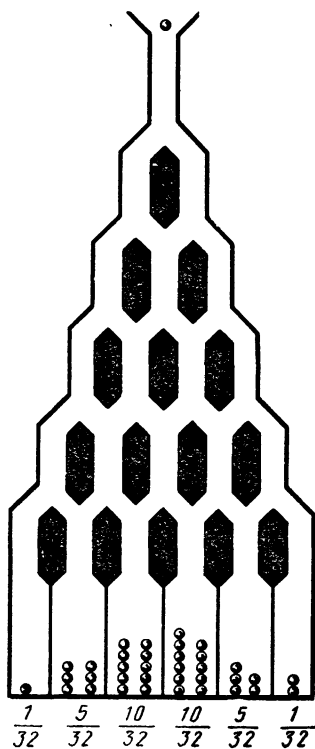


Рис. 8

вниз. Горизонтальную ось теперь удобно использовать для того, чтобы по ней откладывать число шагов. На рис. 6 изображен возможный график движения частицы.

Легко понять, что в этой задаче число возможных способов перемещения частицы за t шагов будет равно 2^t . На рис. 7 подсчитано число способов, которыми можно попасть через t шагов в то или иное положение (на ту или иную высоту).

Блуждание такого рода осуществляется в специальном приборе, который называют доской Гальтона. На рис. 8 изображена схема возможного устройства этого прибора. Металлические шарики один за другим попадают в самый верхний канал. Наткнувшись на первое острие, они должны выбрать путь направо либо налево. Затем происходит второй такой выбор и т. д. При тщательной подгонке деталей выбор пути оказывается вполне случайным: любой из 2^t способов (в нашем случае $t=5$) равновозможен. Пропустив через прибор большое число шариков, обнаруживают, что доля шариков, попавших в каждое из делений внизу, примерно соответствует рассчитанным вероятностям.

Оставим теперь приборы, иллюстрирующие физический механизм случайности, и займемся математикой. Выпишем числа с рис. 7 в виде таблицы:

		$\rightarrow m$									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	сумма
$\downarrow n$	0	1									1
	1	1	1								2
	2	1	2	1							4
	3	1	3	3	1						8
	4	1	4	6	4	1					16
	5	1	5	10	10	5	1				32
	6	1	6	15	20	15	6	1			64
	7	1	7	21	35	35	21	7	1		128
	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	256

Закон образования таблицы ясен: в каждой клетке стоит сумма числа, стоящего непосредственно сверху, и числа, стоящего сверху слева. Например:

$$56 = 21 + 35.$$

Отдельно приходится оговорить, что в нулевом столбце и по диагонали стоят единицы. Можно поступить иначе, считать, что таблица продолжается неограниченно влево и вправо, но заполнена там нулями. Ее начало будет тогда иметь вид:

		$\rightarrow m$									
		...	-2	-1	0	1	2	3	4	...	
	0	...	0	0	1	0	0	0	0	...	
\downarrow	1	...	0	0	1	1	0	0	0	...	
n	2	...	0	0	1	2	1	0	0	...	

Теперь основное правило заполнения таблицы будет действовать без всяких исключений, начиная с первой строки.

Обозначив через C_n^m число, стоящее в таблице на пересечении m -го столбца и n -й строки, можно записать правило заполнения таблицы в виде формулы

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m. \quad (4)$$

Особо надо задать числа нулевой строки

$$C_0^m = \begin{cases} 1 & \text{при } m=0, \\ 0 & \text{при остальных значениях } m. \end{cases}$$

Наша таблица (без заполнения клеток, где все равно стоят нули) называется *треугольником Паскаля*.

Вернемся к задаче о блуждании по прямой, но изменим ее постановку. Пусть частица движется по горизонтальной прямой и каждую секунду либо делает один шаг вправо (на какое-либо фиксированное расстояние h), либо остается на месте. За n секунд частица содвинется не более чем на n шагов. Но возникает вопрос о том, какое число шагов за n секунд будет наиболее вероятным, если считать все возможные варианты движения равновероятными. Ведь ясно, что крайние случаи (0 шагов и n шагов) при большом числе шагов появляются лишь в виде крайне редких исключений.

Учитывая все сказанное выше, вы без труда докажете, что вероятность сделать m шагов за первые n се-

кунд в нашей задаче равна

$$P_n(m) = \frac{C_n^m}{2^n}. \quad (5)$$

На рис. 9 даны графики функций $P_n(m)$ от m при $n=1, 2, 4, 8, 16, 32$. Масштаб по горизонтальной оси выбран постепенно уменьшающимся, так что максимальный возможный пробег частицы все время изображается от-

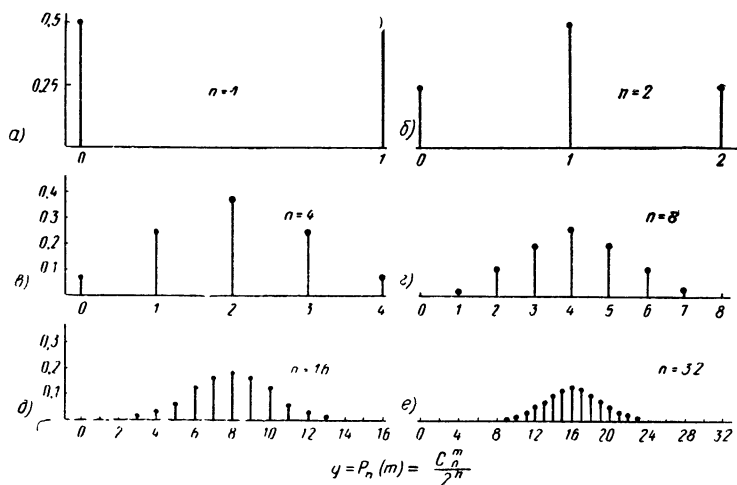


Рис. 9

резком одной и той же длины. Масштаб по вертикальной оси (где откладываются вероятности) сохраняется неизменным.

Из рисунка видно, что наиболее вероятным все время является среднее значение пробега

$$\bar{x} = \frac{1}{2} n.$$

Большие же отклонения от этого среднего с возрастанием n делаются все более редкими. Можно доказать, что среднее квадратическое отклонение от среднего пробега в этой задаче равно

$$\frac{1}{2} \sqrt{n}.$$

Например, за 10 000 сек средний пробег будет 5000 шагов, а среднее квадратическое отклонение от этого среднего будет лишь 50 шагов. Здесь мы соприкасаемся с одним из фундаментальных предложений теории вероятностей — законом больших чисел, о котором речь будет в конце изучаемой сейчас темы.

§ 6. ВИНОМ НЬЮТОНА

Числа C_n^m называются биномиальными коэффициентами. При этом имеют в виду их употребление в алгебре, не связанное с теорией вероятностей и задачами о блужданиях. Вам известны формулы:

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1, \\ (a+b)^1 &= a+b, \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Сразу обращает на себя внимание то обстоятельство, что числовые коэффициенты взяты из соответствующих строк треугольника Паскаля.

Вычислим еще:

$$(a+b)^4 = (a+b)^3 (a+b).$$

Для этого надо умножить

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

на a и на b и результаты сложить:

$$\begin{array}{r} a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\ a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\ \hline a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array}$$

Нетрудно заметить, что коэффициенты суммы получают- ся точно по тому закону, по какому формировался тре- угольник Паскаля.

Возникает гипотеза, что всегда

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^m a^{n-m}b^m + \dots + b^n. \quad (6)$$

Гипотеза верна. Знакомые с принципом математической индукции могут провести строгое доказательство фор- мулы биннома Ньютона (6), опираясь на равенство (4) из § 5.

§ 7. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ И ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ

Числом сочетаний из n по m называется число способов выделения из множества, состоящего из n предметов, подмножества, состоящего из m предметов. Например, из множества, состоявшего из четырех букв А, Б, В, Г,

можно выделить шесть различных множеств, состоящих каждое из двух букв:

{А, Б}, {А, В}, {А, Г}, {Б, В}, {Б, Г}, {В, Г}.

Оказывается, что число сочетаний из n по m равно соответствующему элементу треугольника Паскаля C_n^m .

Этот факт легко понять, если обратиться к последней задаче о блуждании из § 5. Например, чтобы определить число различных способов, которыми в этой задаче частица может сделать два шага направо за 4 сек, надо перебрать все способы выделения из четырех секундных промежутков двух промежутков. Таких способов *шесть*

	1	2	3	4
1	+	+		
2	+		+	
3	+			+
4		+	+	
5		+		+
6			+	+

Знакомые с методом математической индукции могут провести общее доказательство, опираясь на равенство (4) из § 5.

§ 8. ФОРМУЛА, ВЫРАЖАЮЩАЯ БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧЕРЕЗ ФАКТОРИАЛЫ, И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Эта замечательная формула имеет вид

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} . \quad (7)$$

Ее тоже можно доказать с помощью метода математической индукции. Дадим другое, более непосредственное доказательство.

Если из n предметов отобраны m , то можно $m!$ способами занумеровать отобранные предметы номерами 1, 2, 3, ..., m . Оставшиеся $n-m$ предметов можно обозначить номерами

$$m+1, m+2, \dots, n$$

$(n-m)!$ способами. Таким образом, получим

$$m! (n-m)!$$

обозначений номерами

$$1, 2, \dots, n$$

всего множества из n предметов. Но сам отбор m элементов из n можно произвести C_n^m способами. Таким образом, всего получим

$$C_n^m m! (n-m)!$$

нумераций полного множества из n элементов.

Каждую нумерацию этого множества получаем ровно один раз. Всего же их $n!$. Поэтому:

$$C_n^m m! (n-m)! = n!,$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m! (n-m)!},$$

что и требовалось доказать.

Чтобы формула (7) была верна и при $n=0$, и при $m=0$, надо положить

$$0! = 1.$$

Формула (7) позволяет вычислять C_n^m в случае больших n и m , пользуясь таблицей логарифмов факториалов.

Вычислим, например, в задаче из конца § 5 вероятность сделать за 100 сек ровно 50 шагов. Эта вероятность равна

$$P_{100}(50) = \frac{C_{100}^{50}}{2^{100}} = \frac{100!}{2^{100} (50!)^2}.$$

Таблица логарифмов факториалов

x	$\lg x!$	x	$\lg x!$	x	$\lg x!$	x	$\lg x!$
1	0,0000	26	26,6056	51	66,1906	76	111,2754
2	0,3010	27	28,0370	52	67,9066	77	113,1619
3	0,7782	28	29,4841	53	69,6309	78	115,0540
4	1,3802	29	30,9465	54	71,3633	79	116,9516
5	2,0792	30	32,4237	55	73,1037	80	118,8547
6	2,8573	31	33,9150	56	74,8519	81	120,7632
7	3,7024	32	35,4202	57	76,6077	82	122,6770
8	4,6055	33	36,9387	58	78,3712	83	124,5961
9	5,5598	34	38,4702	59	80,1420	84	126,5204
10	6,5598	35	40,0142	60	81,9202	85	128,4498
11	7,6012	36	41,5705	61	83,7055	86	130,3843
12	8,6803	37	43,1387	62	85,4979	87	132,3238
13	9,7943	38	44,7185	63	87,2972	88	134,2683
14	10,9404	39	46,3096	64	89,1034	89	136,2177
15	12,1165	40	47,9116	65	90,9163	90	138,1719
16	13,3206	41	49,5244	66	92,7359	91	140,1310
17	14,5511	42	51,1477	67	94,5619	92	142,0948
18	15,8063	43	52,7811	68	96,3945	93	144,0632
19	17,0851	44	54,4246	69	98,2333	94	146,0364
20	18,3861	45	56,0778	70	100,0784	95	148,0141
21	19,7083	46	57,7406	71	101,9297	96	149,9964
22	21,0508	47	59,4127	72	103,7870	97	151,9831
23	22,4125	48	61,0939	73	105,6503	98	153,9744
24	23,7927	49	62,7841	74	107,5196	99	155,9700
25	25,1906	50	64,4831	75	109,3946	100	157,9700

Логарифмические вычисления не сложны¹:

$$\lg 100! = 157,9700$$

$$\lg 2 = 0,3010300, \lg 2^{100} = 30,1030$$

$$\lg 50! = 64,4831, \lg (50!)^2 = 128,9662$$

$$\lg P_{100}^{(50)} = 2,9008$$

$$P_{100}^{(50)} = 0,0796 \approx 0,08.$$

¹ $\lg 2$ приходится брать с семью знаками, чтобы получить P с четырьмя (после запятой).

СОДЕРЖАНИЕ

В И ЛЕВИН. НАЧАЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ	3
■	
А. И. МАРКУШЕВИЧ. ИНТЕГРАЛ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МА- ТЕМАТИКИ	18
■	
И. М. ЯГЛОМ. АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ОБОСНОВАНИЯ ЕВКЛИ- ДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ	40
■	
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ, И. М. ЯГЛОМ. ВЕКТОРНОЕ ОБОСНО- ВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ	64
■	
Н. Х. РОЗОВ. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ	93
■	
Н. Я. ВИЛЕНКИН, И. М. ЯГЛОМ. ТЕОРИЯ ГРУПП И ШКОЛЬ- НАЯ МАТЕМАТИКА	114
■	
Л. А. КАЛУЖНИН. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В ШКОЛЬНОМ ПРЕПОДАВАНИИ	147
Б. В. ГНЕДЕНКО. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ И ШКОЛЬ- НЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ	165
■	
А. Н. КОЛМОГОРОВ. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И КОМБИНАТОРИКУ	181

Цена 30 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»
Москва 1972